

目 录

第一章 超声波的基本原理	1
§ 1.1 引言	1
§ 1.2 质点及简单机械振动系统的振动	1
§ 1.3 固体中的弹性波	18
§ 1.4 均匀棒的振动	31
第二章 单一变幅杆的理论和设计	53
§ 2.1 引言	53
§ 2.2 变截面杆纵振动的波动方程	55
§ 2.3 指数形变幅杆	56
§ 2.4 悬链线形变幅杆	74
§ 2.5 圆锥形变幅杆	84
§ 2.6 阶梯形变幅杆	95
§ 2.7 楔形变幅杆	101
§ 2.8 单一变幅杆的设计计算图表	106
§ 2.9 小结	121
第三章 复合变幅杆的理论和设计	127
§ 3.1 复合变幅杆的一般公式	127
§ 3.2 带有特定形状过渡段的阶梯形变幅杆	129
§ 3.3 一端带有圆柱杆的复合变幅杆	147
§ 3.4 倒锥形复合变幅杆	155
§ 3.5 高斯形变幅杆	157
§ 3.6 傅里叶形变幅杆	162
第四章 有负载的变幅杆	164
§ 4.1 引言	164

§ 4.2	负载力抗对变幅杆共振频率的影响	164
§ 4.3	负载为力阻时变幅杆的特性	169
§ 4.4	具有任意负载力阻抗的变幅杆理论	176
第五章	大横截面变幅杆·变幅器	190
§ 5.1	引言	190
§ 5.2	大横截面圆柱杆的振动	190
§ 5.3	圆盘形变幅器	196
§ 5.4	$L-L-L$ 振动方向变换器	199
§ 5.5	$R-L$ 振动方向变换器	207
§ 5.6	轴心开孔的 $R-L$ 振动方向变换器	213
§ 5.7	负载对 $R-L$ 振动方向变换器振动特性的影响	217
第六章	扭转振动变幅杆	226
§ 6.1	引言	226
§ 6.2	变截面杆扭转振动的波动方程	226
§ 6.3	指数形扭转振动变幅杆	228
§ 6.4	阶梯形扭转振动变幅杆	232
§ 6.5	扭转振动的隔振圆盘	234
第七章	超声变幅杆的设计和测量	239
§ 7.1	变幅杆类型及所用材料的选择	239
§ 7.2	设计方法	241
§ 7.3	变幅杆的测量	242
附录	若干种固体的声学常数表	247
参考文献		263

第一章 超声波的基本原理

§ 1.1 引言

质点和简单机械振动系统的振动与超声波的传播原理是超声变幅杆设计的理论基础。因此本章首先讨论质点和简单机械振动系统的振动，并且介绍研究声振动和声波常用的力电类比方法，然后简要介绍在固体介质中弹性波的传播，最后着重讨论均匀截面棒的振动问题。

§ 1.2 质点及简单机械振动系统的振动

机械振动是指质点在其平衡位置附近所作的往返运动。超声波是机械波，为了研究它，首先要研究机械振动；而物体的振动又是组成该物体的各质点振动的总结果。因此，我们将首先讨论最基本的机械振动——质点振动。质点的直线振动是最简单的情况，因为其它复杂振动都可以看作是直线振动的合成。

1.2.1 质点的机械振动

当一质点作直线振动时，取平衡位置为原点，可以用质点离平衡位置的位移 ξ 随时间 t 而变化的函数 $\xi = \Phi(t)$ 来描述。很多情况下，这个函数是周期性的，即每隔一固定时间（称为周期 T ），运动就重复一次，其函数关系为 $\Phi(t) = \Phi(t + T)$ ，这种振动称为周期性振动；当函数 Φ 是最简单的周期

函数即余弦(或正弦)函数时,则称为谐和振动。这种运动可以用图 1.1 的质量弹簧系统来表示。将质量从平衡位置垂直拉下,并随后放开,则质量 M 将上下振动。若在振动质量上置一光源,则在以等速横向移动的光敏膜带上将记录下这一运动规律。

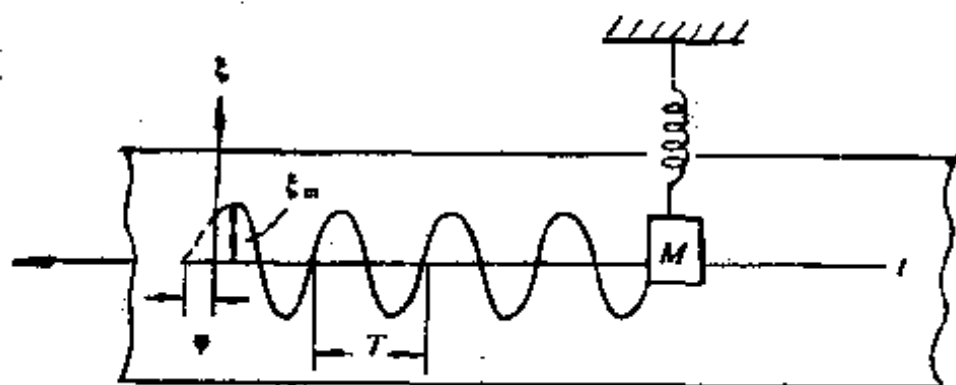


图 1.1 质量弹簧系统

$$\begin{aligned}\xi &= \xi_m \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) = \xi_m \cos(2\pi ft + \varphi) \\ &= \xi_m \cos(\omega t + \varphi),\end{aligned}\quad (1.1)$$

式中 ξ_m 为振幅,是质点离开平衡位置的最大位移; T 是周期;
 $f = \frac{1}{T}$ 为频率,单位是赫; $\omega = 2\pi f$ 为圆频率; φ 是初相位

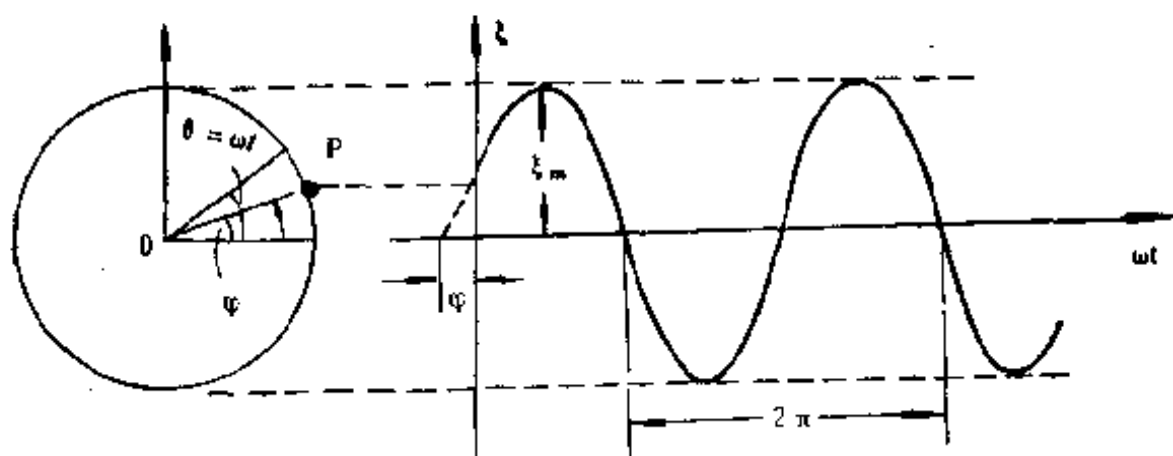


图 1.2 质点 P 作圆周运动在纵坐标上的投影

角。

谐和振动常以作等速圆周运动的质点在纵坐标轴 ξ 上的投影来表示。如图 1.2 所示。质点 P 以角速度 ω 运动，质点在纵坐标上的投影与 ωt 的关系曲线与图 1.1 相同。

将式(1.1)对时间求一次和二次导数，可以得到谐和振动的速度 $\dot{\xi}$ 和加速度 a ，

$$\dot{\xi} = -\omega\xi_m \sin(\omega t + \varphi) = \omega\xi_m \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right), \quad (1.2)$$

$$a = -\omega^2\xi_m \cos(\omega t + \varphi) = \omega^2\xi_m \cos(\omega t + \varphi + \pi). \quad (1.3)$$

速度的最大值 $\omega\xi_m$ 称为速度振幅，加速度振幅为 $\omega^2\xi_m$ 。由上式可见，振动速度与位移的相位相差 $\frac{\pi}{2}$ 弧度，加速度与位

移的相位相差 π 弧度。

研究机械振动和波的数学方法与研究交变电流和电磁波的方法相类似，通常用谐和振动的复数形式表示。正弦和余弦三角函数与指数函数的关系以欧拉 (Euler) 方程表示为

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta. \quad (1.4)$$

因此，式(1.1)又可写成

$$\xi = \xi_m \cos(\omega t + \varphi) = \operatorname{Re}[\xi_m e^{j(\omega t + \varphi)}].$$

为简单起见，一般略去实数符号 Re ，因此式(1.1)可以写成

$$\xi = \xi_m e^{j(\omega t + \varphi)}, \quad (1.5)$$

这就是谐和振动的复数表示式。根据复数运算法则，由式(1.5)可得速度 $\dot{\xi}$ 和加速度 a

$$\dot{\xi} = j\omega\xi_m e^{j(\omega t + \varphi)} = j\omega\xi, \quad (1.6)$$

$$a = -\omega^2\xi. \quad (1.7)$$

由式(1.7)可见，在超声频范围(16kHz 以上)，质点的位移振幅虽然不大，但由于加速度与 ω^2 成正比，其加速度振幅却很大。

质点谐和振动的能量 在图 1.1 所描述的简单谐和振动

中,当质点位移最大时,其速度为零,而位移等于零时,速度达到最大值,在振动过程中,系统的动能和位能相互转换。在理想情况下,即系统没有损耗时,系统的总能量保持不变。

所有微小单元克服系统恢复力所作的功 $s\xi d\xi$ 的总和等于位能

$$PE = \int_0^{\xi} s\xi d\xi = \frac{1}{2} s\xi^2,$$

位能最大值发生在 $\xi = \pm \xi_m$ 处,所以位能最大值为

$$PE_{\max} = \frac{1}{2} s\xi_m^2,$$

其中 s 是弹簧的弹性系数。质点的动能为

$$KE = \frac{1}{2} m\dot{\xi}^2.$$

动能最大值为 $KE_{\max} = \frac{1}{2} m\omega^2\xi_m^2$, 由于 $PE_{\max} = KE_{\max}$,

所以 $s = m\omega^2$ 。在任何时刻,总能量 E 为

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} m\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2} s\xi^2 \\ &= \frac{1}{2} m\omega^2\xi_m^2 [\sin^2(\omega t + \varphi) + \cos^2(\omega t + \varphi)] \\ &= \frac{1}{2} m\omega^2\xi_m^2 = \frac{1}{2} s\xi_m^2, \end{aligned}$$

这是一个恒定值。

图 1.3 表示质点谐和振动能量随位移的变化曲线。位能和动能随位移的变化曲线呈抛物线形,因为位移和速度之间的相位相差 $\frac{\pi}{2}$,所以两曲线互为倒置。对任何位移值,两曲线的纵坐标之和等于总能量 E 。

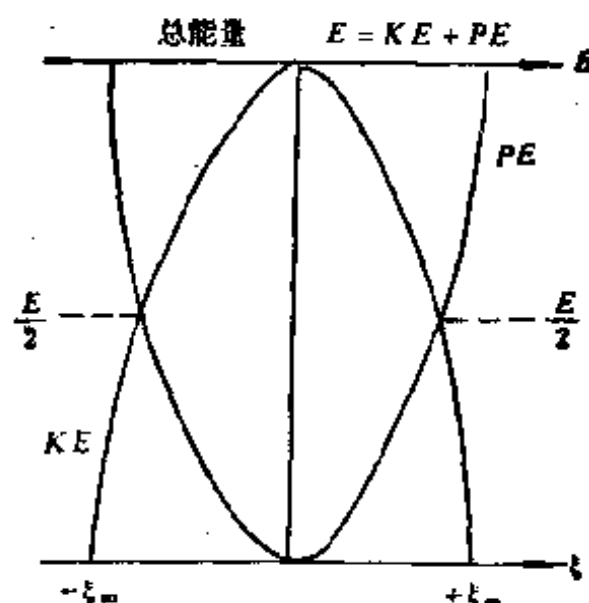


图 1.3 质点谐和振动能量

1.2.2 简单机械振动系统

我们先讨论最简单的机械振动系统。图 1.4 表示一个质量为 M 的物体，置于底座上，底座对物体的运动起阻尼作用，用弹簧把物体联系到一固定点上。我们来讨论一个周期性外

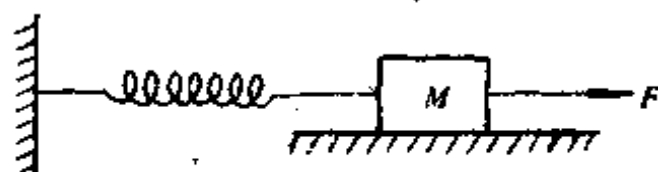


图 1.4 简单振动系统

力 $F = F_m \cos(\omega t) = F_m e^{j\omega t}$ 作用于这一简单机械振动系统时的运动情况。

当物体离平衡位置的位移为 ξ 时，弹簧对物体的作用力指向平衡位置，且与位移成正比，因此这个力可以写成 $(-\xi)$ 的形式，负号表示弹性力和位移相反。关于阻尼力，我们假定它与振动速度成正比而方向相反，因此阻尼力可写成 $(-R_m \dot{\xi})$

的形式, R_m 称为力阻. 这样, 物体的运动方程可以写成

$$F = -R_m \dot{\xi} - s\xi = Ma,$$

或

$$M \frac{d^2 \xi}{dt^2} + R_m \frac{d\xi}{dt} + s\xi = F_m e^{i\omega t}. \quad (1.8)$$

1. 无阻尼自由振动 在不受外力 ($F = 0$) 也没有阻尼 ($R_m = 0$) 的情况下, 系统作无阻尼自由振动. 这时的运动方程变为

$$M \frac{d^2 \xi}{dt^2} + s\xi = 0,$$

或

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} + \omega_0^2 \xi = 0.$$

由微分方程求解, 得到

$$\xi = \xi_m \cos(\omega_0 t + \varphi) = \xi_m e^{i(\omega_0 t + \varphi)}. \quad (1.9)$$

式中 ω_0 是无阻尼自由振动系统的本征圆频率, $\omega_0 = (s/M)^{\frac{1}{2}} = 2\pi f_0$, f_0 称为振动系统的固有频率, 因为它由系统本身的参数 M 和 s 决定. 振幅 ξ_m 和初相位角 φ 则由初始条件给定.

2. 阻尼振动 在不受外力, 但阻尼存在的情况下, 运动方程为

$$M \frac{d^2 \xi}{dt^2} + R_m \frac{d\xi}{dt} + s\xi = 0,$$

或

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} + 2\delta \frac{d\xi}{dt} + \omega_0^2 \xi = 0. \quad (1.10)$$

其中

$$\delta = R_m/2M, \quad \omega_0 = (s/M)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.11)$$

式(1.10)是常系数线性微分方程,其一般解为

$$\xi = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}, \quad (1.12)$$

其中 r_1, r_2 是特征方程

$$r^2 + 2\delta r + \omega_0^2 = 0$$

的两个根。由此得

$$r_1, r_2 = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}. \quad (1.13)$$

当 $\delta^2 > \omega_0^2$, 即 $R_m^2 > 4sM$ (阻尼很大)时, r_1, r_2 皆为实数, 且 $r_1 < 0, r_2 < 0$. 微分方程的解不呈简谐函数形式。如将物体移开平衡位置, 再任其自由运动, 则物体的位移将逐渐减小而趋于零。

当 $\delta^2 < \omega_0^2$, 即 $R_m^2 < 4sM$ (阻尼不大)时, 则

$$r_1, r_2 = -\delta \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}.$$

令

$$Q = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2},$$

则

$$r_1, r_2 = -\delta \pm jQ. \quad (1.14)$$

代入式(1.12), 得

$$\xi(t) = e^{-\delta t}(\xi_{m1} \cos Qt + \xi_{m2} \sin Qt),$$

或

$$\xi(t) = \xi_m e^{-\delta t} \cos(Qt - \varphi) = \xi_m(t) \cos(Qt - \varphi). \quad (1.15)$$

其中

$$\xi_m = (\xi_{m1}^2 + \xi_{m2}^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \lg \varphi = \xi_{m2} / \xi_{m1},$$

$$\xi_m(t) = \xi_m e^{-\delta t}.$$

ξ_{m1}, ξ_{m2} 决定于振动的初始条件。式(1.15)表示一振幅随时间衰减的阻尼振动, 振动圆频率等于 Q , 它仍取决于系统本身的参数, 由式(1.14)可知, 它不等于 ω_0 , 而是略低于 ω_0 。

δ 为阻尼系数, 其物理意义如下: δ 愈大, 阻力愈大, 振

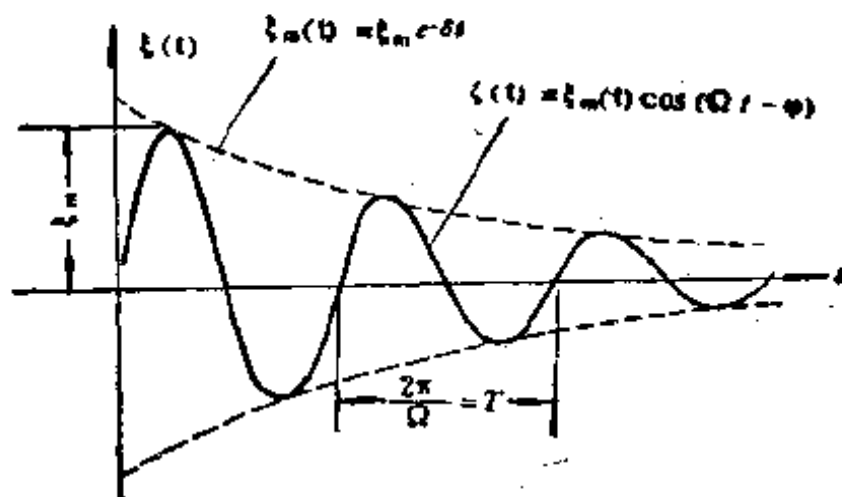


图 1.5 阻尼振动

幅 $\xi_m(t)$ 的衰减愈快; 当 $t = 0$ 时, 振幅等于 ξ_m , 经 t 时刻后, 下降为 $\xi_m(t)$, 如图 1.5,

$$\delta = \frac{1}{t} \ln[\xi_m / \xi_m(t)].$$

当取 $t = T_0 = 1/f_0$ 时, $\delta T_0 = \ln[\xi_m / \xi_m(t)]$, 表示一周期内振幅的对数衰减, 称为对数衰减量, 以 ϑ 表示

$$\vartheta = \delta T_0 = \ln[\xi_m / \xi_m(t)], \quad (1.16)$$

因为 $\delta = R_m / 2M$, 所以

$$\vartheta = T_0 R_m / 2M. \quad (1.17)$$

系统所受的阻尼作用还可以用机械品质因数 Q_m 表示, Q_m 定义为振幅衰减到初始值的 $1/e^*$ 时所经过的周期数, 即

$$\xi(Q_m T_0) = \xi_m e^{-\delta Q_m T_0} = \xi_m / e^*.$$

所以

$$\pi = \delta Q_m T_0,$$

$$Q_m = \pi / \delta T_0 = \omega_0 M / R_m \quad (1.18)$$

由上式可见, R_m 愈大, 即阻尼作用愈大, 机械品质因数 Q_m 愈低, 振动衰减愈快.

3. 强迫振动 式(1.8)的稳态解为

$$\dot{\xi} = \frac{d\xi}{dt} = \frac{F}{Z_m} = \frac{\bar{F}_m e^{j\omega t}}{R_m + j\left(\omega M - \frac{s}{\omega}\right)}, \quad (1.19)$$

式中 Z_m 是力和振动速度的比值, 称为力阻抗。

$$Z_m = R_m + j\left(\omega M - \frac{s}{\omega}\right) = |Z_m| e^{j\varphi}, \quad (1.20)$$

式中

$$|Z_m| = \sqrt{R_m^2 + (\omega M - s/\omega)^2}, \quad (1.21)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = (\omega M - s/\omega)/R_m, \quad (1.22)$$

其中, R_m 是力阻; ωM 称为力感抗; M 可称为力感; s/ω 称为力容抗, 而 $C_m = 1/s$ 可称为力容, $|Z_m|$ 是力阻抗的幅值, 而 φ 是力阻抗的相位角。

式(1.19)的三角形形式为

$$\dot{\xi} = \frac{F_m e^{j\omega t}}{|Z_m| e^{j\varphi}} = \frac{F_m}{|Z_m|} e^{j(\omega t - \varphi)} = \dot{\xi}_m \cos(\omega t - \varphi),$$

式中 $\dot{\xi}_m$ 是振动速度的振幅

$$\dot{\xi}_m = \frac{F_m}{|Z_m|} = \frac{F_m}{\sqrt{R_m^2 + (\omega M - s/\omega)^2}}. \quad (1.23)$$

由振动速度 $\dot{\xi}$ 可以求出位移 ξ 和加速度 a 的复数形式和三角形形式,

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\dot{\xi}}{j\omega} = \frac{F_m}{\omega Z_m} e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})} = \frac{F_m}{\omega |Z_m|} e^{j(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2})} \\ &= \xi_m \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right), \end{aligned} \quad (1.24)$$

$$\begin{aligned} a &= j\omega \dot{\xi} = \frac{F_m \omega}{Z_m} e^{j(\omega t + \frac{\pi}{2})} = \frac{F_m \omega}{|Z_m|} e^{j(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2})} \\ &= a_m \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned} \quad (1.25)$$

其中 ξ_m 及 a_m 分别为位移和加速度振幅。

• • •

以上分析可以看到在周期性外力的作用下, 达到稳定状态后, 振动系统将按外力的圆频率作谐和振动, 我们称其为强迫振动。强迫振动的振幅大小由外力圆频率 ω 与系统的固有圆频率 ω_0 之间的关系确定。由式 (1.23), (1.24) 和 (1.25) 可以画出 ξ_m 、 $\dot{\xi}_m$ 和 a_m 随外力圆频率 ω 变化的情况, 如图 1.6 所示。图中存在三个区域:

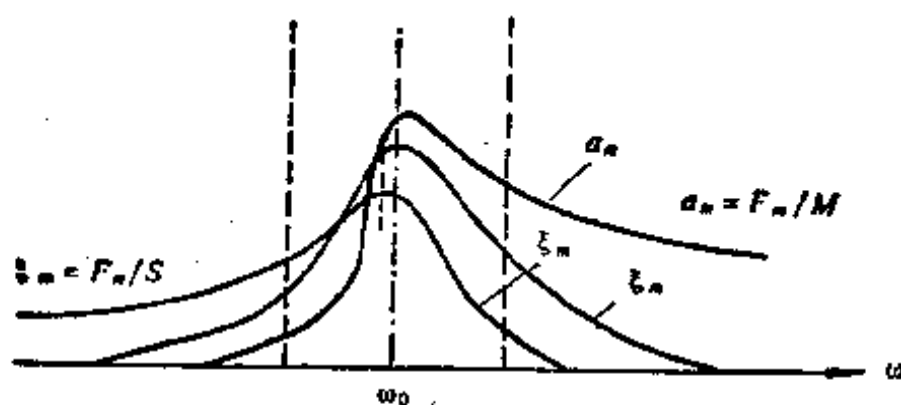


图 1.6 强迫振动特性

(i) 弹性控制区。当 $\omega \ll \omega_0$ 时, $|Z_m| \simeq s/\omega$, 按照式 (1.22)、(1.23)、(1.24) 和 (1.25) 可以得到

$$\varphi \simeq -\frac{\pi}{2}, \quad \xi_m \simeq F_m/s, \quad \dot{\xi}_m \simeq F_m\omega/s,$$

$$a_m = F_m\omega^2/s. \quad (1.26)$$

可以看出, 振动状态主要与系统的弹性常数 s 有关, 所以 $\omega \ll \omega_0$ 的区域称为弹性控制区。值得注意的是, 这时位移振幅直接与外力振幅成正比而与频率无关。

(ii) 惯性控制区。当 $\omega \gg \omega_0$ 时, $|Z_m| \simeq \omega M$, 可以得到

$$\varphi \simeq \frac{\pi}{2}, \quad \xi_m \simeq \frac{F_m}{\omega^2 M}, \quad \dot{\xi}_m \simeq \frac{F_m}{\omega M}, \quad a_m \simeq \frac{F_m}{M}. \quad (1.27)$$

这一区域内, 振动状态主要与系统的惯性(质量)有关, 所以称

$\omega \gg \omega_0$ 的区域为惯性控制区。这时加速度振幅 a_m 与外力振幅成正比而与频率无关。

(iii) 阻尼控制区(共振区)。当 $\omega = \omega_0$ 时, $|Z_m| \simeq R_m$ 达到最小值, 而 φ 趋近于零, 振动速度达到最大, $\dot{\xi}_m \simeq F_m/R_m$ 和力同相位, 这种现象称为机械共振。即外力频率等于系统的固有频率时, 系统达到共振状态。加速度振幅 $a_m \simeq \omega F_m/R_m$, 在 $\omega \simeq \omega_0$ 区域内振动状态主要由阻尼 R_m 来决定, 所以称为阻尼控制区。

功率频率特性 为维持系统作稳态振动, 在系统振动过程中必须不断补充能量, 这个能量主要来自外力对系统所作的功。令 W 为外力作的功, 则瞬时功率为

$$\frac{dW}{dt} = F \frac{d\xi}{dt} = F \dot{\xi}.$$

稳态时, $\dot{\xi} = \frac{F_m}{|Z_m|} \cos(\omega t - \varphi)$, $F = F_m \cos \omega t$, 所以

$$\frac{dW}{dt} = \frac{F_m^2}{|Z_m|} \cos(\omega t - \varphi) \cos \omega t. \quad (1.28)$$

取周期平均值, 即得机械功率 P_M 为

$$\begin{aligned} P_M &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{F_m^2}{|Z_m|} \cos(\omega t - \varphi) \cos \omega t dt \\ &= \frac{1}{2} \frac{F_m^2}{|Z_m|} \cos \varphi, \end{aligned}$$

而

$$\cos \varphi = R_m/|Z_m|,$$

所以

$$P_M = \frac{1}{2} \dot{\xi}_m^2 R_m. \quad (1.29)$$

式(1.29)表明, P_M 和振动速度幅值 $\dot{\xi}_m$ 的平方成正比, 和系统

的阻力 R_m 成正比。当振动速度给定而增大 R_m 时, 振动一周所消耗的能量增大, 所以需要的功率也增加。由于

$$P_M = \frac{1}{2} \frac{F_m^2}{|Z_m|^2} \cdot R_m,$$

所以

$$\begin{aligned} P_M &= \frac{1}{2} \frac{F_m^2}{R_m} \cdot \frac{1}{1 + \frac{(\omega M - s/\omega)^2}{R_m^2}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{F_m^2}{R_m} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega_0 M}{R_m}\right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{s}{\omega \omega_0 M}\right)^2} \end{aligned}$$

当 $\omega = \omega_0$ 时, P_M 为最大值

$$(P_M)_{\max} = \frac{1}{2} \frac{F_m^2}{R_m}.$$

于是有

$$\frac{P_M}{(P_M)_{\max}} = \frac{1}{1 + Q_m^2 \left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f}\right)^2} \quad (1.30)$$

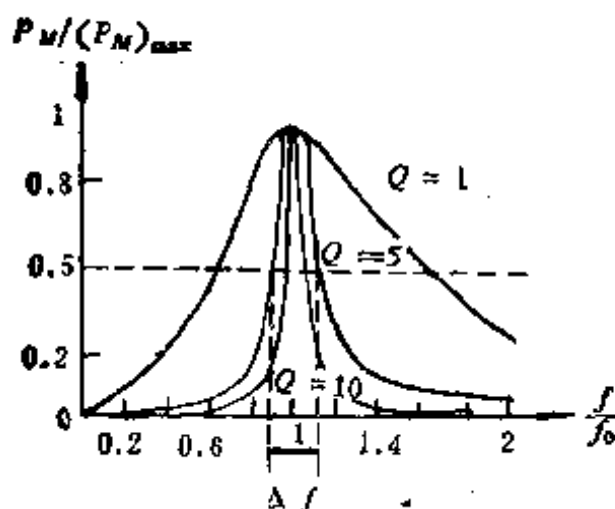


图 1.7 不同参数 Q 时的功率频率特性

图 1.7 为式 (1.30) 在不同 Q_m 值时的功率频率特性曲线。这

里, 我们定义功率下降到最大值的一半时两频率之差为频带宽度 Δf .

令 $P_M/(P_M)_{\max} = \frac{1}{2}$, 故频率 f_1, f_2 满足 ($f_2 > f_1$)

$$\left. \begin{aligned} \frac{f_0}{f_1} - \frac{f_1}{f_0} &= \frac{1}{Q_m}, \\ \frac{f_2}{f_0} - \frac{f_0}{f_2} &= \frac{1}{Q_m}, \end{aligned} \right\}$$

两式联立消去 Q_m 得 $f_1 f_2 = f_0^2$. 将两式相加得

$$\begin{aligned} \frac{f_0(f_2 - f_1) + f_1 f_2(f_2 - f_1)}{f_1 f_2 f_0} &= \frac{2}{Q_m}, \\ \frac{2f_0(f_2 - f_1)}{f_0^2} &\approx \frac{2}{Q_m}, \quad \frac{f_2 - f_1}{f_0} = \frac{1}{Q_m}, \end{aligned}$$

而 $\Delta f = f_2 - f_1$, 所以

$$\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{1}{Q_m} \quad \text{或} \quad \frac{\Delta f}{f_0} = \frac{9}{\pi}. \quad (1.31)$$

由式(1.31)可见, 机械品质因数 Q_m 愈大, 则相对频带宽度愈小, 频率特性曲线也愈尖锐. 当这个系统作为单频声波的发射器, 而其机械系统的谐振频率等于声波的频率时, 可在给定推动力幅值下, 获得最大振动速度的幅值, 并取得最大的机械功率和发射功率.

位移振幅的频率特性 根据式(1.24), 位移振幅为

$$\begin{aligned} \xi_m &= \frac{F_m}{\omega \sqrt{R_m^2 + \left(\frac{s}{\omega}\right)^2 \left(\frac{\omega^2 M}{s} - 1\right)^2}} \\ &= \frac{\xi_0}{\sqrt{\frac{1}{Q_m^2} \left(\frac{f}{f_0}\right)^2 + \left[\left(\frac{f}{f_0}\right)^2 - 1\right]^2}}. \end{aligned} \quad (1.32)$$

其中 $\xi_0 = F_m/s$, 是当 $\omega \rightarrow 0$ 时的静态位移, $Q_m = \omega_0 M/s$

R_m .

由上式可见,当 $f = f_0$ 时, $\xi_m = Q_m \xi_0$, 即共振时, 外力产生的振动位移振幅等于同样大小的静态力作用时所产生的位移的 Q_m 倍. 因此, 如果系统阻尼作用很小, 即机械品质因数较大时, 则共振位移振幅很大. 但是, $f = f_0$ 并不是位移最大值所在点. 对式(1.32)的 f/f_0 求极值, 可以得到 ξ_m 最大时的频率 f'_0 为

$$f'_0 = f_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q_m^2}}. \quad (1.33)$$

可见位移 ξ_m 最大时的频率 f'_0 比共振频率 f_0 略小, 但当 Q_m 相当大时, $f'_0 \simeq f_0$.

图 1.8 给出位移频率特性曲线. 由图可以看出, Q_m 愈

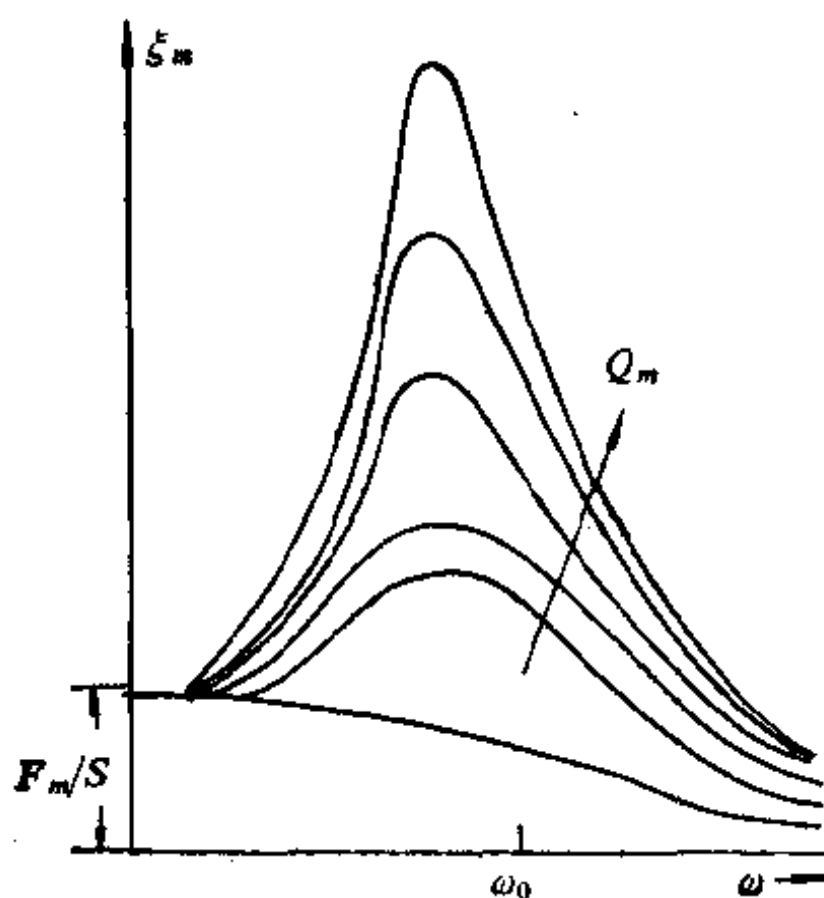


图 1.8 位移频率特性

大, 曲线愈陡峭. 图 1.9 为位移和力之间相位差的频率特性. Q_m 愈大, 在共振点附近的相位变化愈大, Q_m 小则变化较慢.

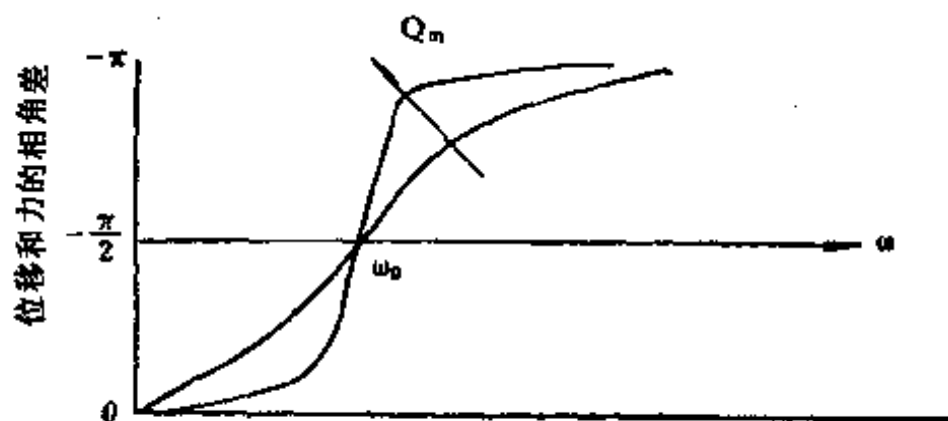


图 1.9 位移和力相位差频率特性

1.2.3 力电类比

由前面的分析可以看到, 描述简单机械振动系统的运动方程和描述交流电路的某些微分方程在形式上是相似的. 例如图 1.4 所示的简单机械振动系统, 其运动方程已在 (1.8) 式给出, 如果以振动速度为变量, 则可写成

$$M \frac{d\dot{\xi}}{dt} + R_m \dot{\xi} + s \int \dot{\xi} dt = F = F_m e^{j\omega t}. \quad (1.34)$$

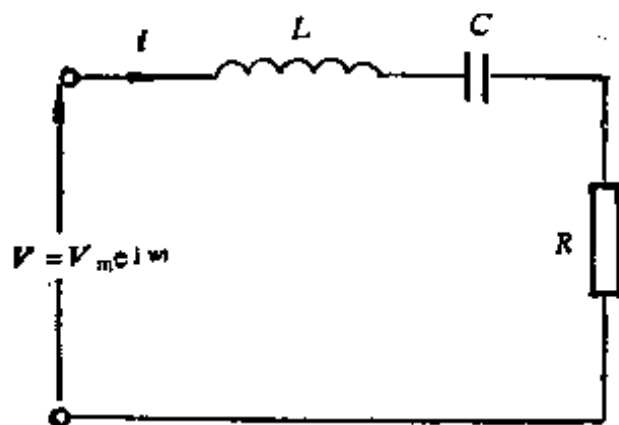
在一个由电感 L 、电容 C 和电阻 R 构成的串联电路上施加交流电压 $V = V_m e^{j\omega t}$, 如图 1.10 所示, 则这一交流电路的微分方程为

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = V, \quad (1.35)$$

或

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = V. \quad (1.36)$$

式中 q 为电荷, i 为电流强度. 这方程的稳态解是



LCR 串联交流电路

图 1.10

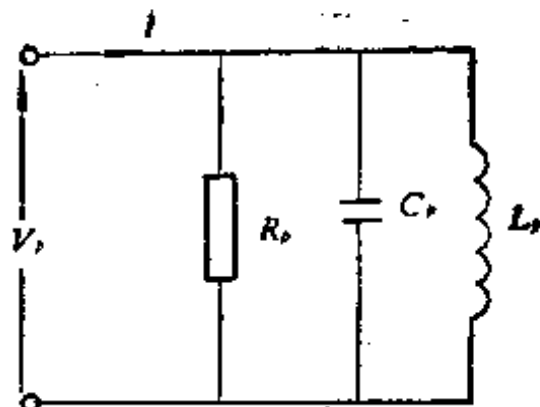
$$i = \frac{V}{Z} = \frac{V_m e^{j\omega t}}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{V_m e^{j\omega t}}{|Z| e^{j\varphi}} \\ = \frac{V_m}{|Z|} e^{j(\omega t - \varphi)} = I_m e^{j(\omega t - \varphi)},$$

其中,电阻抗 $Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$, 幅值 $|Z| = \left[R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$, 而相位角 φ 为

$$\lg \varphi = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) / R.$$

比较式(1.8)和式(1.35),或比较式(1.34)和式(1.36),或把微分方程的解相对比,就可以看到两者之间的类比关系。这里力类比于电压,振动速度类比于电流,力阻抗类比于电阻抗,其他各量也都可以作一一类比。象这样的力学振动系统和电路之间的类比称力电类比。上面的例子由于力阻抗类比于电阻抗,所以叫做阻抗型力电类比。

对于一个由 L_p 、 C_p 和 R_p 并联的电路,如图 1.11 所示,



L_p, C_p, R_p 并联交流电路

图 1.11

当施加以交变电压 V_p 时, 则微分方程为

$$i_p = C_p \frac{dV_p}{dt} + \frac{V_p}{R_p} + \frac{1}{L_p} \int V_p dt. \quad (1.37)$$

比较式(1.37)和(1.34), 可以看出两个微分方程的形式也相类似。但此时力 F 类比于电流 i_p , 振动速度 $\dot{\xi}$ 类比于电压 V_p , 力阻抗类比于电导纳。这种力电类比称为导纳型力电类比。

利用力电类比, 可以把一些复杂的机械振动和弹性波问题用人们所熟知的交流电路或电磁波的方法来解决。由于简便而实用, 这一类比方法在超声振动系统的研究中得到较为广泛的使用。

上面所讨论的只由一个力阻、一个力容和一个力感所构成的简单机械振动系统, 其相应的类比电路也是由一个电阻、一个电容和一个电感所构成。对于复杂的机械振动系统, 其类比电路需由多个元件并以各种方式组合而成。不管简单还是复杂的机械振动系统, 只要这个系统能以分立的力学元件组合, 都叫做集中参量振动系统。对于另一些弹性体的振动, 例如棒的振动, 由于棒的每一微元都具有质量、弹性和阻尼, 它不能视为独立的质量、弹性等元件, 这样的系统我们称为分布参数系统。在电学上, 象电传输线一类的设备也是分布参数

系统,因为传输线的每一微元也同时具有电感、电容和电阻的性能。这一类问题实际属于弹性波和电磁波类型的问题,但在某些情况下,例如在共振态附近,分布参量的振动系统往往可用一个等效的集中参量振动系统来近似地反映其振力特性。有时为计算方便,甚至把分布参量的振动系统以集中参量的电网络形式来处理。这种等效网络的处理方法在超声换能器及变幅杆中是常见的。在以后的章节中我们将给出具体的运用。

§ 1.3 固体中的弹性波

当固体介质受到外力作用时,将引起形变,与此同时,内部介质的交界面上将产生互相作用力。在一般情况下,除了产生体积形变外还要产生剪切形变,因此在无限弹性固体介质中,变形将激起两种波,即压缩波和切变波,又称为纵波和

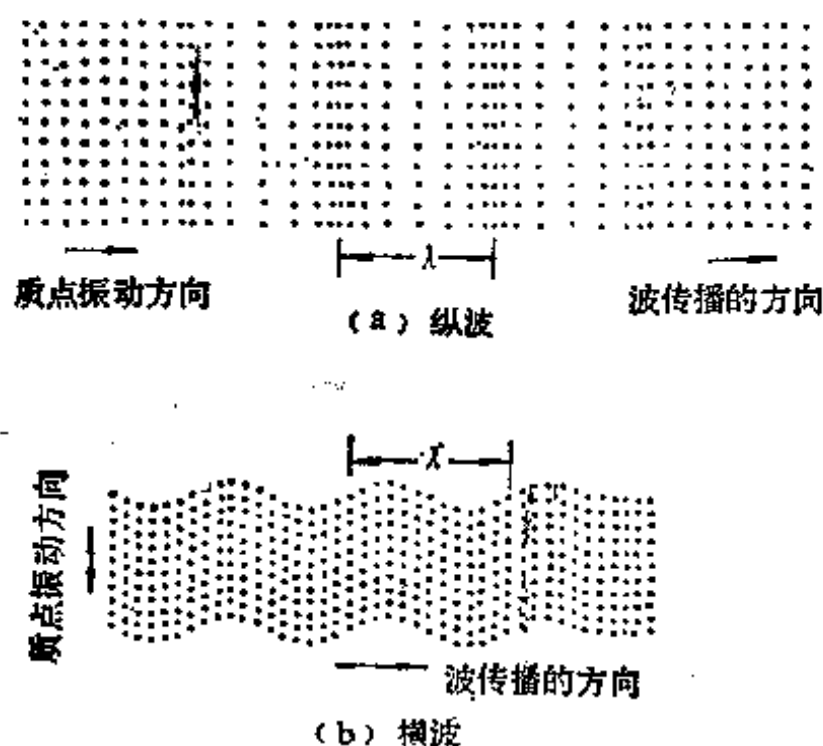


图 1.12 固体中的纵波和横波及质点的运动方向

横波,如图 1.12. 这两种波以不同的速度在介质中传播,传播的速度决定于固体介质的弹性模量和密度. 如果固体有自由界面,则在固体自由表面下的介质中还会出现沿自由表面传播的表面波,这种波又称瑞利波.

固体弹性介质中的应力和应变关系是研究弹性固体波动和振动现象的基础,因此我们先简要讨论固体弹性介质中的应力、应力分量及形变、应变分量等.

1.3.1 应力和应变

在发生形变的固体介质中任取一小体积元,一般来说,作用在小体积元表面上的应力不但有垂直于表面的分量,还有切向分量,如图 1.13 所示. 在直角坐标系中取 P 点邻近的小六面体元,作用在六面体每一面上的应力可分解为三个分量,分别用 $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{yx}, \sigma_{xz}, \sigma_{zx}, \sigma_{yz}, \sigma_{zy}$ 等表示. 足标的第一个字母表示应力的方向,第二个字母表示应力所在的垂直于坐标轴的平面. 为满足平衡条件,力矩为零,因此有

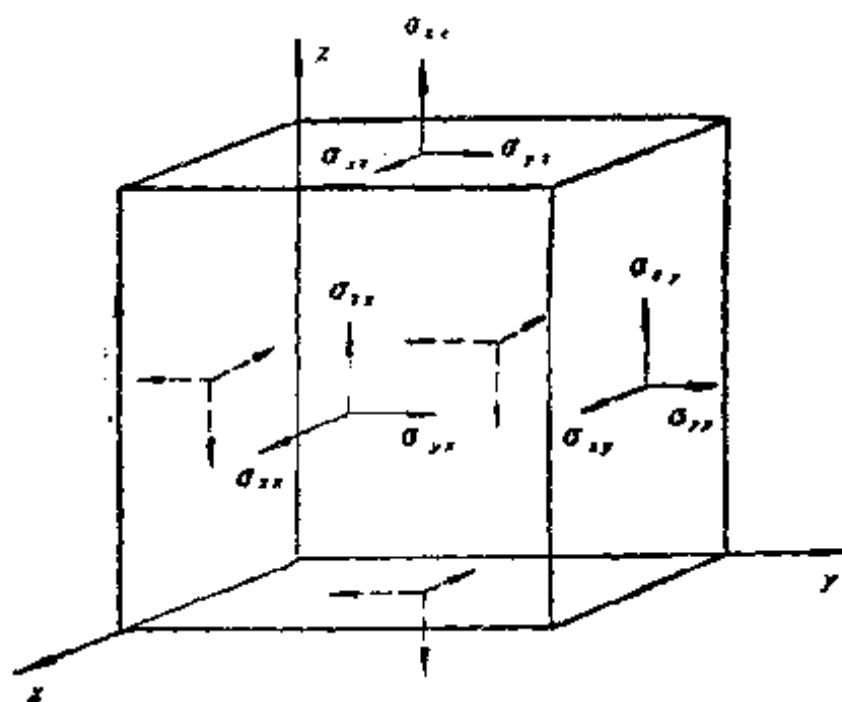


图 1.13 固体中的应力分量

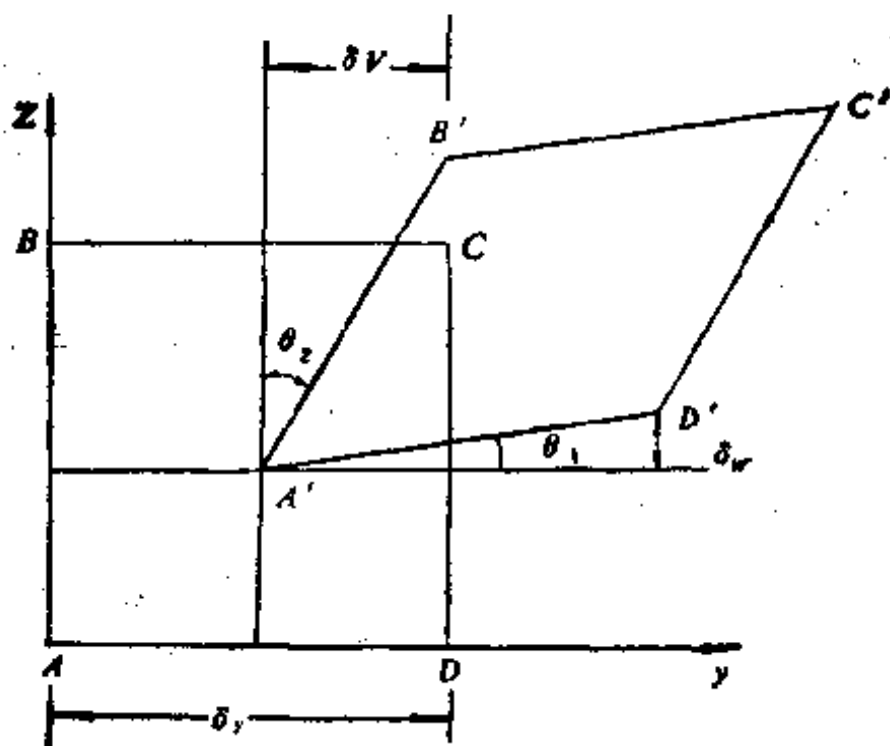


图 1.14 纵向、剪切应变和转动

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}, \sigma_{xz} = \sigma_{zx}, \sigma_{yz} = \sigma_{zy},$$

这样，描写物体内部任一点的应力状态只需要六个独立应力分量。

物体内部任一点 P 的位移可以沿 x, y, z 轴分解为相应的 u, v, w 分量。如果 P 点的初始状态坐标为 (x, y, z) ，则发生变形后的坐标为 $(x + u, y + v, z + w)$ 。在 P 点附近，未变形时的坐标为 $(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z)$ ，则其位移分量为 $(u + \delta u, v + \delta v, w + \delta w)$ ，如果 $\delta x, \delta y$ 和 δz 都足够小，则有

$$\left. \begin{aligned} \delta u &= \frac{\partial u}{\partial x} \delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \delta z, \\ \delta v &= \frac{\partial v}{\partial x} \delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \delta y + \frac{\partial v}{\partial z} \delta z, \\ \delta w &= \frac{\partial w}{\partial x} \delta x + \frac{\partial w}{\partial y} \delta y + \frac{\partial w}{\partial z} \delta z, \end{aligned} \right\}$$

如果该点的 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial z}$, $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial w}{\partial z}$ 九个量为已知值, 则所有邻近点的相对位移都可以得到。

为分析方便, 写成下列形式:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \varepsilon_{yx} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, & \varepsilon_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, & 2\omega_x &= \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \\ 2\omega_y &= \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \\ 2\omega_z &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (1.38)$$

ε_{xx} , ε_{yy} 及 ε_{zz} 代表 P 点邻近介质平行于 x , y 和 z 轴的相对伸长, ε_{xy} , ε_{yz} 和 ε_{zx} 是相应平面上的应变的剪切分量, 而 ω_x , ω_y 和 ω_z 相应于此小体元的刚体转动。

图 1.14 表示小体元在 yz 平面投影的形变。 $ABCD$ 变形后成为 $A'B'C'D'$, θ_1 和 θ_2 为 $A'D'$, $A'B'$ 线段与 y 和 z 轴的夹角, $\operatorname{tg} \theta_1 = \partial w / \partial y$, $\operatorname{tg} \theta_2 = \partial v / \partial z$, 当 θ_1, θ_2 足够小时, $\varepsilon_{yz} = \theta_1 + \theta_2$ 为剪切应变, 而 $2\omega_x = \theta_1 - \theta_2$ 是 AC 对角线绕 x 轴的转动。

1.3.2 应力和应变之间的关系, 广义胡克定律

实验证明, 当弹性体形变很小时, 作用于它的应力和相应的应变成正比, 每个应力分量都是各形变分量的线性函数,

其最一般的关系为

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= c_{11}\varepsilon_{xx} + c_{12}\varepsilon_{yy} + c_{13}\varepsilon_{zz} + c_{14}\varepsilon_{yz} \\
 &\quad + c_{15}\varepsilon_{zx} + c_{16}\varepsilon_{xy}, \\
 \sigma_{yy} &= c_{21}\varepsilon_{xx} + c_{22}\varepsilon_{yy} + c_{23}\varepsilon_{zz} + c_{24}\varepsilon_{yz} \\
 &\quad + c_{25}\varepsilon_{zx} + c_{26}\varepsilon_{xy}, \\
 \sigma_{zz} &= c_{31}\varepsilon_{xx} + c_{32}\varepsilon_{yy} + c_{33}\varepsilon_{zz} + c_{34}\varepsilon_{yz} \\
 &\quad + c_{35}\varepsilon_{zx} + c_{36}\varepsilon_{xy}, \\
 \sigma_{yz} &= c_{41}\varepsilon_{xx} + c_{42}\varepsilon_{yy} + c_{43}\varepsilon_{zz} + c_{44}\varepsilon_{yz} \\
 &\quad + c_{45}\varepsilon_{zx} + c_{46}\varepsilon_{xy}, \\
 \sigma_{zx} &= c_{51}\varepsilon_{xx} + c_{52}\varepsilon_{yy} + c_{53}\varepsilon_{zz} + c_{54}\varepsilon_{yz} \\
 &\quad + c_{55}\varepsilon_{zx} + c_{56}\varepsilon_{xy}, \\
 \sigma_{xy} &= c_{61}\varepsilon_{xx} + c_{62}\varepsilon_{yy} + c_{63}\varepsilon_{zz} + c_{64}\varepsilon_{yz} \\
 &\quad + c_{65}\varepsilon_{zx} + c_{66}\varepsilon_{xy},
 \end{aligned} \right\} \quad (1.39)$$

称为广义胡克定律。式中 c_{ij} 为弹性常数，它们决定于介质的弹性性能。在弹性极限内，由于弹性能是应变的单值函数，可以证明，弹性常数具有对称性，即 $c_{ij} = c_{ji}$ 。因此，独立的常数只有 $36 - 15 = 21$ 个。

不同的晶体具有不同数目的轴对称，于是独立的弹性常数还将减少。对均匀各向同性物质，即指宏观上物质结构均匀，各向弹性性能一致的物体，其独立的弹性常数只有两个，用 λ 与 μ 表示。 λ, μ 称为拉梅常数，

$$\left. \begin{aligned}
 \lambda &= c_{12} = c_{13} = c_{21} = c_{23} = c_{31} = c_{32}, \\
 \mu &= c_{44} = c_{55} = c_{66}, \\
 \lambda + 2\mu &= c_{11} + c_{22} + c_{33},
 \end{aligned} \right\}, \quad (1.40)$$

此时，式(1.39)简化为

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= \lambda\Delta + 2\mu\varepsilon_{xx}, \\
 \sigma_{yy} &= \lambda\Delta + 2\mu\varepsilon_{yy},
 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \lambda \Delta + 2\mu \varepsilon_{xx}, \\ \sigma_{yx} &= \mu \varepsilon_{yx} \quad \sigma_{xx} = \mu \varepsilon_{xx} \quad \sigma_{xy} = \mu \varepsilon_{xy}, \end{aligned} \right\} \quad (1.41)$$

其中 $\Delta = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$ 为体积的相对形变。拉梅常数与弹性模量 E , 泊松比 ν 有如下的关系

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}; \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}. \quad (1.42)$$

1.3.3 固体弹性介质中的波动方程

取一体积为 $\delta x \delta y \delta z$ 的微小六面体如图 1.15 所示, 作用在六面体不同面上的应力均不一样。忽略重力时, 作用在 x 方向的力为

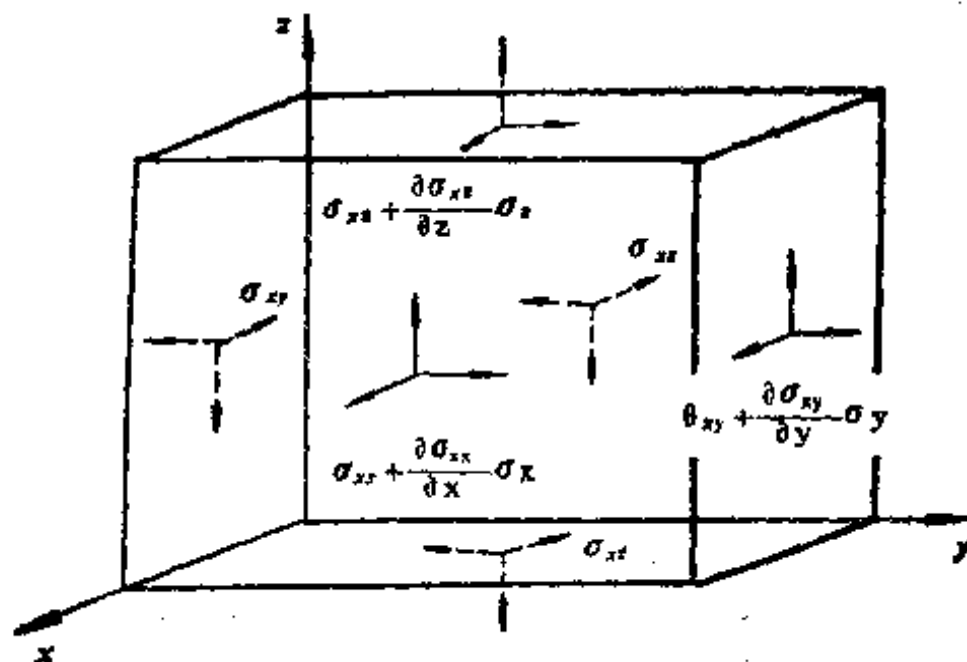


图 1.15 作用在小六面体的应力分量

$$\begin{aligned} & \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \delta x \right) \delta y \delta z - \sigma_{xx} \delta y \delta z \\ & + \left(\sigma_{xy} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \delta y \right) \delta x \delta z \\ & - \sigma_{xy} \delta x \delta z + \left(\sigma_{xz} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \delta z \right) \delta x \delta y - \sigma_{xz} \delta x \delta y \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right) \delta x \delta y \delta z,$$

依牛顿第二定律, 它应等于微小六面体的质量 ($\rho \delta x \delta y \delta z$) 和 x 方向加速度的乘积, 即

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right) &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \text{类似地有 } \left(\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} \right) &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ \left(\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} \right) &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \end{aligned} \right\} \quad (1.43)$$

对于各向同性理想弹性固体, 把式 (1.41) 的应力分量代入式 (1.43) 得

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u, \\ \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial y} + \mu \nabla^2 v, \\ \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial z} + \mu \nabla^2 w, \end{aligned} \right\} \quad (1.44)$$

式中算子 $\nabla^2 \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$, 若以向量表示, 则有

$$\left. \begin{aligned} \nabla = \operatorname{div} \mathbf{H} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \rho \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu) \operatorname{grad} (\operatorname{div} \mathbf{H}) + \mu \nabla^2 \mathbf{H}, \end{aligned} \right\} \quad (1.45)$$

式 (1.44) 和 (1.45) 为固体介质中质点振动状态传播的波动方程. 由式 (1.44) 可以解出位移分量 u, v, w , 即确定固体介质中各点振动位移的瞬时值. 根据式 (1.38) 和 (1.41) 可求出介质中任意一点的应变和应力随时间的变化.

1.3.4 固体中波传播的波型

前面讨论了均匀各向同性固体介质中的波动方程, 现在讨论在固体介质中传播的波型.

1. 压缩波 由式(1.44)中第一式对 x 求微分, 第二式对 y 求微分, 第三式对 z 求微分, 然后三式相加得

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu) \nabla^2 \Delta + \mu \nabla^2 \Delta \\ &= (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \Delta,\end{aligned}$$

或

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2} = C_L^2 \nabla^2 \Delta. \quad (1.46)$$

式中 Δ 是体积的相对形变, 即在无限固体弹性介质中, 压缩形变 Δ 是体积的相对形变, 它以波动形式传播, 称为弹性介质中的压缩波, 其传播速度 $C_L = [(\lambda + 2\mu)/\rho]^{\frac{1}{2}}$.

下面我们来讨论一种特殊情况, 设质点只有 x 方向的振动位移, 即 $v = w = 0$, 由此 $\Delta = \frac{\partial u}{\partial x}$, 此时由式(1.46)得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C_L^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

表明 $u(x, t)$ 是以波速 $C_L = [(\lambda + 2\mu)/\rho]^{\frac{1}{2}}$ 沿 x 方向传播的平面波. 由于 $u(x, t)$ 是质点沿 x 方向的振动位移, 与波传播的方向一致, 故压缩波即为纵波.

2. 切变波 设固体介质体积没有变化, 即没有压缩形变, 纯属切形变. 由式(1.44)有

$$\left. \begin{aligned}\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \mu \nabla^2 u; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C_s^2 \nabla^2 u, \\ \text{及} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= C_s^2 \nabla^2 v,\end{aligned} \right\} \quad (1.47)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = C_s^2 \nabla^2 w,$$

其中 $C_s = (\mu/\rho)^{1/2}$, 式 (1.47) 表明固体弹性介质中还存在着一种以波速 $C_s = (\mu/\rho)^{1/2}$ 传播的波, 称为切变波, 因为其波速决定于切变模量。

令 $v = v(x, t)$, $u = w = 0$ 即只考虑 y 方向的位移不同而产生的纯切变, 即得

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = C_s^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

可见, y 方向的位移 $v(x, t)$ 以波的形式沿 x 方向传播, 是一种横波。如果坐标构成一个水平面, 则这种横波称为水平偏振式横波; 波朝 x 方向传播时也可能产生质点沿 z 方向运动的波, 则这种波称为垂直偏振式横波。

3. 表面波、板波 当固体不是无限介质, 而是具有一自由表面时, 则在介质表面层中会形成一种沿固体自由表面传播、而振幅随深度的增加而迅速衰减的波, 我们称其为表面波, 或称为瑞利波。其波的传播速度比横波小。详细讨论见文献 [3]。

此外, 如果介质有两个自由表面, 它们之间的距离为一个波长的数量级, 则在介质中可能存在另一种波型, 称为兰姆波, 或称板波。

1.3.5 声波的反射和折射

由上面的讨论可知, 固体中能传播纵波和横波。当任一种波从一种介质向另一种介质入射时, 将同时产生反射与折射。当一平面纵波从流体介质以某一入射角向具有无限大平表面的固体介质入射时, 会产生一反射纵波和折射的纵波与横波 (图 1.16 (a))。而当一平面纵波或横波由一固体介质以

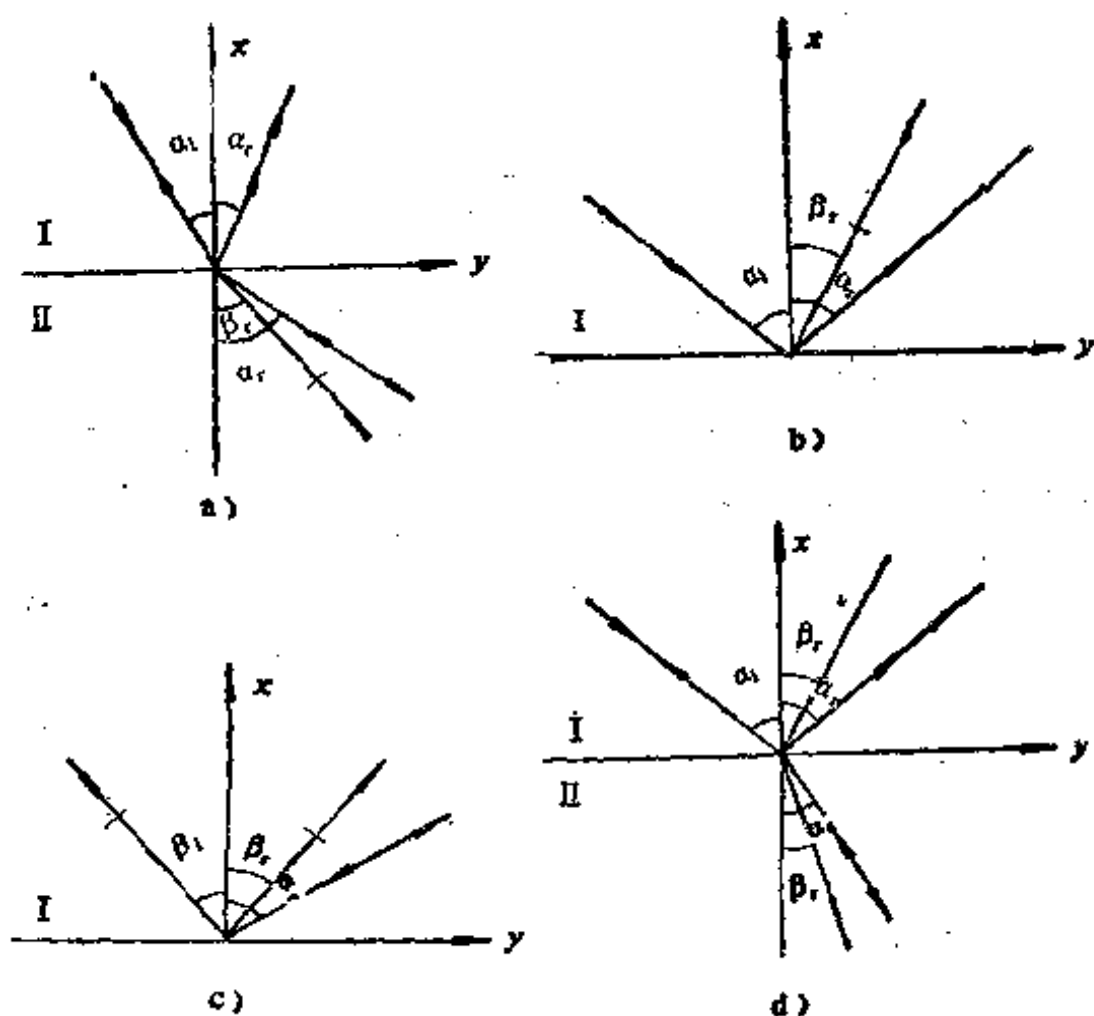


图 1.16 声波的反射和折射

一定的人射角向另一种固体入射时，在交界面处，一般会产生反射纵波和横波以及折射纵波和横波四种波(图 1.16(d))。图 1.16 中波射线上的小棱形代表纵波，横线代表横波。

利用介质分界面处位移连续和应力平衡条件，我们可以得到入射波、反射波和折射波之间的关系。

1. 纵波从流体介质入射于固体介质时的情形 当纵波从流体介质 I (图 1.16(a)) 向固体介质 II 入射时，在流体中只有反射纵波，因为流体中剪切模量为零，不产生横波，其反射角 α_r 等于入射角 α_i 。在固体介质 II 中则有折射纵波和横波，其折射角和入射角的关系为

$$\frac{\sin \alpha_i}{\sin \beta_T} = \frac{C_{1L}}{C_{2L}},$$

$$\frac{\sin \alpha_i}{\sin \alpha_T} = \frac{C_{1L}}{C_{1L}},$$

其中 α_i , α_T 及 β_T 分别表示纵波入射角、折射角和横波折射角; C_{1L} , C_{2L} 及 C_{2T} 分别表示第 I 和第 II 介质中的纵波声速和第 II 介质中的横波声速。

2. 波在固体中自由表面的反射 图 1.16(b) 表示固体中的纵波在自由边界(另一边为真空, 没有折射波)的反射波. 纵波的反射角 α_r 等于入射角 α_i ; 而横波的反射角 β_r 与纵波入射角 α_i 的关系是

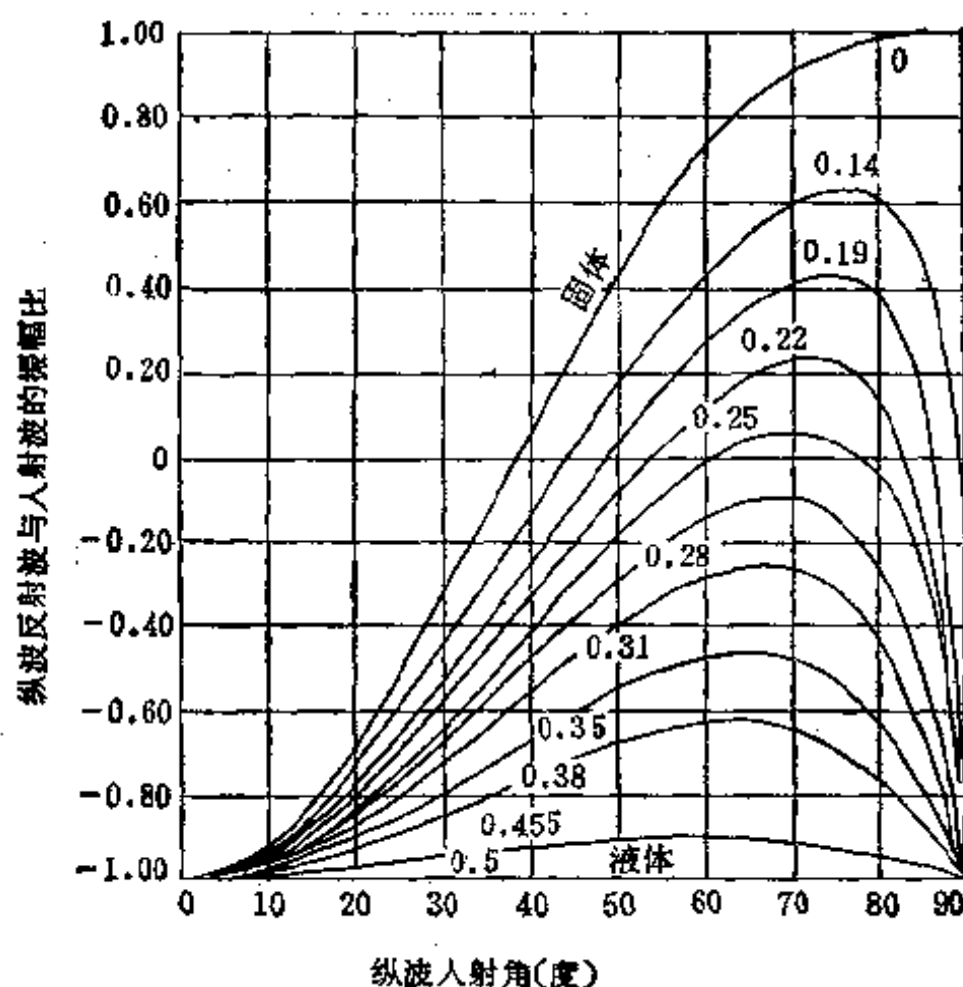


图 1.17 对不同的泊松比, 反射波和入射波振幅之比与入射角的关系

$$\frac{\sin \alpha_i}{\sin \beta_r} = \frac{C_L}{C_s}$$

图 1.17 表示泊松比 ν 不同时, 纵波反射波振幅和入射波振幅之比与入射角的关系。在垂直入射时, 只有反射纵波, 反射波与入射波的振幅相等而相位相反。

图 1.16(c) 表示固体中的横波在自由边界的反射波。当质点平行于 x 轴运动(垂直偏振)时, 在 x 和 y 方向没有运动, 不产生纵波; 当质点垂直于 x 轴运动(水平偏振)时, 则产生反

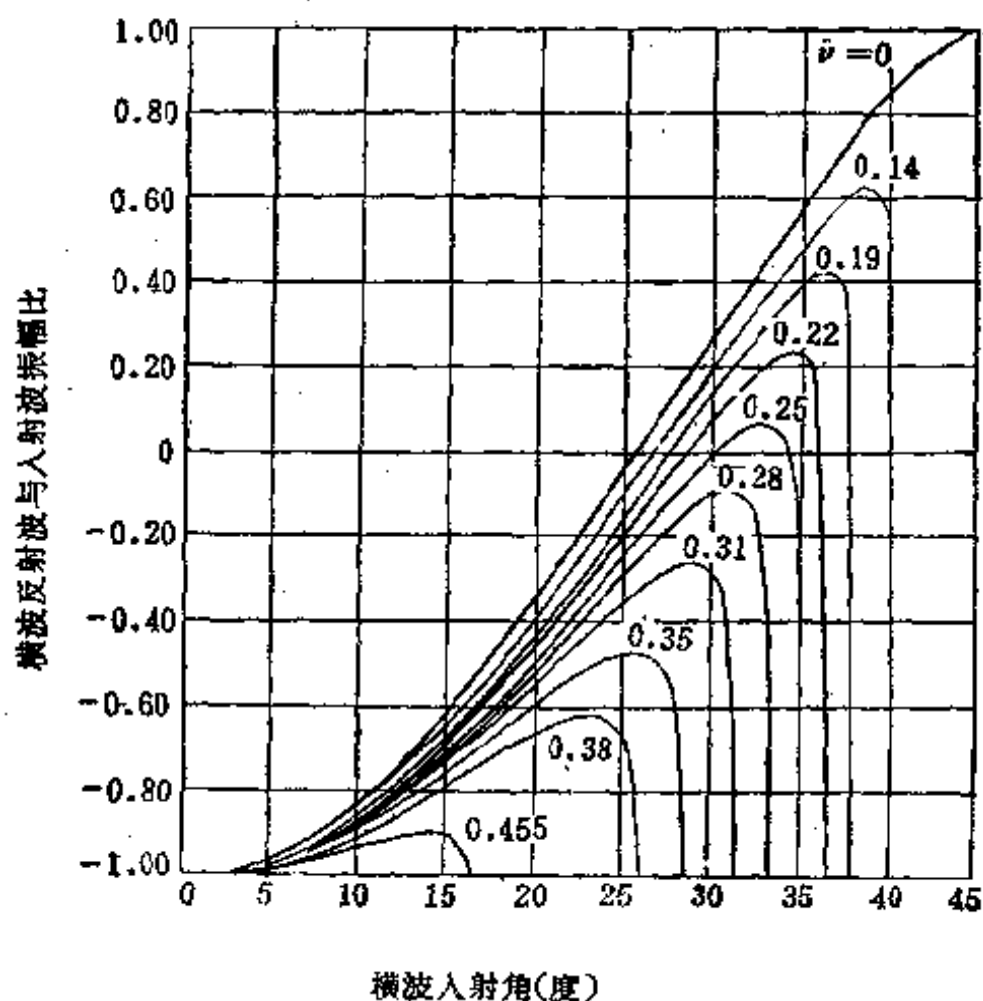


图 1.18 对不同的泊松比, 横波反射波和入射波振幅之比与入射角的关系

射横波和纵波。横波的反射角 β_r 等于入射角 β_i ，而纵波的反射角 α_r 与横波入射角 β_i 的关系为

$$\frac{\sin \alpha_r}{\sin \beta_i} = \frac{C_L}{C_T}$$

图 1.18 表示泊松比 ν 不同时，横波反射波和入射波振幅之比与入射角的关系。在垂直入射时，没有反射纵波。

3. 在两固体分界面上的反射和折射 图 1.16(d) 表示在固体介质 I 中纵波入射到交界面时产生的反射和折射波。入射角、反射角和折射角之间的关系遵循反射和折射定律

$$\frac{\sin \alpha_i}{C_{1L}} = \frac{\sin \alpha_r}{C_{1L}} = \frac{\sin \beta_r}{C_{1L}} = \frac{\sin \alpha_T}{C_{2L}} = \frac{\sin \beta_T}{C_{2L}}$$

如果纵波是垂直入射 ($\alpha_i = 0$)，则只产生反射和透射纵波，而不产生横波。此时位移振幅的反射系数 R_r (反射波与入射波振幅比值) 及透射系数 T_r (透射波与入射波振幅比值) 分别为

$$R_r = \frac{\rho_2 C_{2L} - \rho_1 C_{1L}}{\rho_2 C_{2L} + \rho_1 C_{1L}},$$

$$T_r = \frac{2\rho_1 C_{1L}}{\rho_2 C_{2L} + \rho_1 C_{1L}}.$$

其中 ρ_1, ρ_2 是第 I 和第 II 介质的密度。可见若在两种介质中声速和密度的乘积相同，则在垂直入射时没有反射波。这个乘积 ρC 称为介质的特性阻抗。

当在介质 I 中的入射波不是纵波而是横波时，与自由边界反射情况相似，必须区别横波是垂直偏振或水平偏振。当入射横波是垂直偏振时，不产生纵波；而当入射横波是水平偏振时则产生四种波，其反射和折射定律类同于纵波入射的情况。

§ 1.4 均匀棒的振动

前面所介绍的质点和简单机械振动系统的振动,是属于集中参数机械振动系统问题,它常常是超声换能器或振动系统的简化模型。实际上超声振动系统常常是分布参数系统。例如用以推动板作为声辐射器的镍或者压电棒,用以放大振动幅度的变幅杆等等,这一类振动系统都属于分布参数系统。

棒本身是弹性体,它与集中参数系统不同,它是一种连续介质,其振动运动在介质中以波的形式传播,棒的振动是弹性波在有限介质中的传播问题。本节将着重介绍棒的纵向、弯曲和扭转振动,因为这些不同的振动方式在超声换能器及振动系统中是常见的;也是以后分析变截面杆振动的理论基础。

1.4.1 均匀细棒的纵振动

考虑一截面积大小不变,材料密度和弹性常数均匀而且没有机械损耗的细棒。当沿棒的轴向施以激发力时,棒中将产生纵波。质点振动位移方向平行于轴向,由于弹性形变的泊松效应,轴向的形变会引起横向的形变,因此质点产生轴向位移的同时也产生垂直于轴向的位移。当棒的横向尺寸与其长度相比甚小时,或者说当棒的横向尺寸远小于纵波波长时,就成为我们所说的细棒情况,其横向位移与纵向位移相比甚小,可略去不计。此时棒中的纵波是平面纵波,截面上各质点作等幅同相振动。

1. 波动方程 图 1.19 是一细棒,取轴向为 x 轴,在动态应力 $\sigma(x, t)$ 的作用下,纵向位移为 $\xi(x, t)$ 。观察一微小体

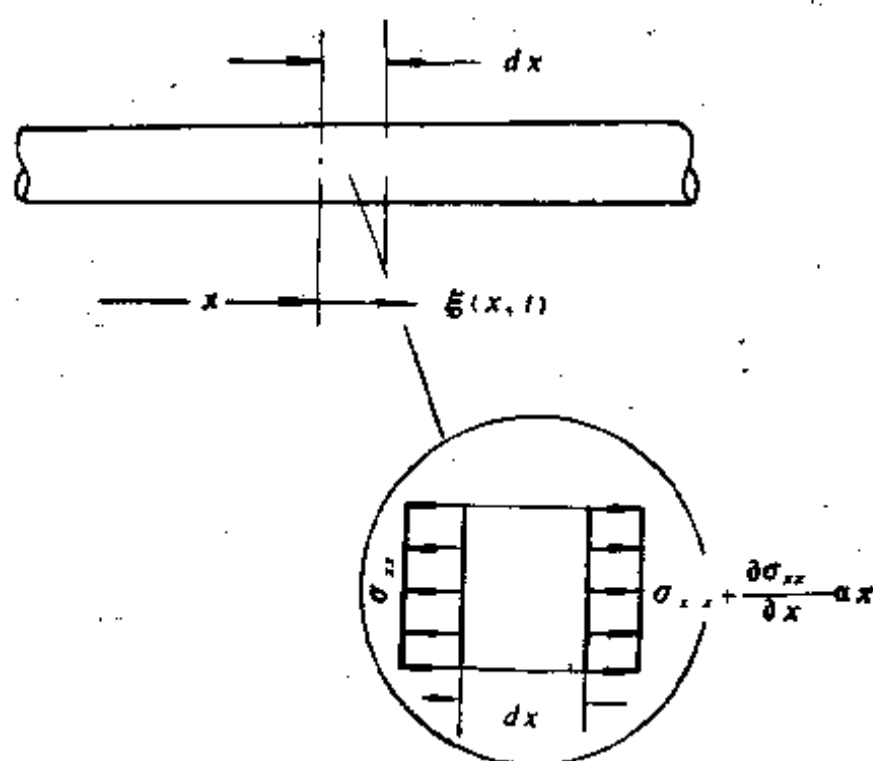


图 1.19 棒的纵振动

元, 长度为 dx , 截面积为 S . 在 x 处的应力为 σ_{xx} , 而在 $x + dx$ 处为 $\sigma_{xx} + (\partial \sigma_{xx} / \partial x) dx$, 则其运动方程为

$$S \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx = \rho S \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} dx, \quad (1.48)$$

根据胡克定律 $\sigma_{xx} = E(\partial \xi / \partial x)$, 代入上式得

$$E \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2},$$

或

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = C_L^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \quad (1.49)$$

式(1.49)是均匀细棒中的波动方程, 其中 $C_L = (E/\rho)^{1/2}$ 为纵波传播速度, E 为杨氏模量, ρ 为棒材的密度. 由式(1.43), 当只有 σ_{xx} 存在时, 同样得到棒中的纵波波动方程式(1.49).

2. 纵波波动方程的解 由于棒是有界的, 波在端面上反射, 形成正向和反向波的迭加. 因此式(1.49)的解取为

$$\begin{aligned}\xi(x, t) = & (A_1 \cos kx + B_1 \sin kx) \\ & \cdot (A_2 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t),\end{aligned}\quad (1.50)$$

$$\begin{aligned}F(x, t) = & SE \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \\ = & SE(-A_1 k \sin kx + B_1 k \cos kx) \\ & \cdot (A_2 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t).\end{aligned}\quad (1.51)$$

式中 $\xi(x, t)$ 及 $F(x, t)$ 分别为位移和力; $k = \frac{\omega}{C_L} = \frac{2\pi}{\lambda}$, 称为圆波数, $\lambda = C_L/f$ 为波长, f 为振动频率. A_1, B_1 和 A_2, B_2 为待定常数. A_1, B_1 决定于边界条件; 而常数 A_2, B_2 决定于初始条件.

(i) 两端自由的细棒

棒两端自由时, 无论 t 为何值, 力为零, 即有边界条件

$$\left. \begin{aligned}F_{x|_{x=0}} = SE \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x=0} &= 0, \\ F_{x|_{x=l}} = SE \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x=l} &= 0,\end{aligned} \right\} \quad (1.52)$$

l 为棒的长度. 初始条件为

$$\begin{aligned}\xi(x, t) \Big|_{t=0} &= \xi_0(x), \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} \Big|_{t=0} &= \dot{\xi}_0(x).\end{aligned}\quad (1.53)$$

利用边界和初始条件(1.52)、(1.53)来确定式(1.50)、(1.51)中的自由振动频率和系数 A_1, B_1, A_2, B_2 .

以式(1.51)代入式(1.52)中, 根据边界条件(1.52)的第一式有

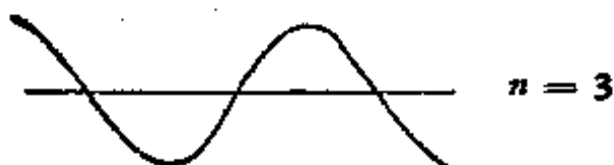
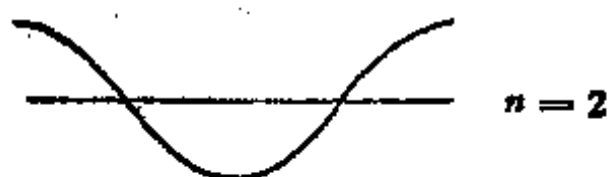
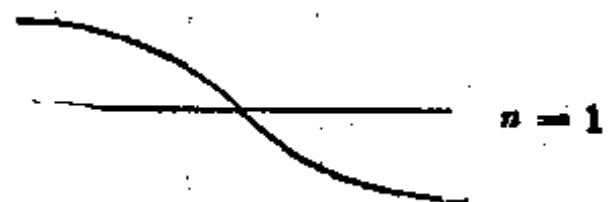
$$SE B_1 k (A_2 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t) = 0.$$

显然 $SE k \neq 0$, 又 B_1, A_2 不同时为零, 为使上式恒成立, 取

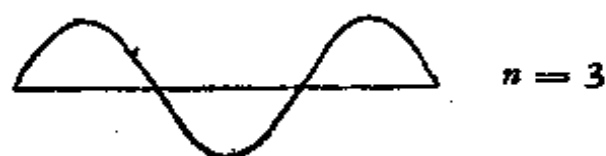
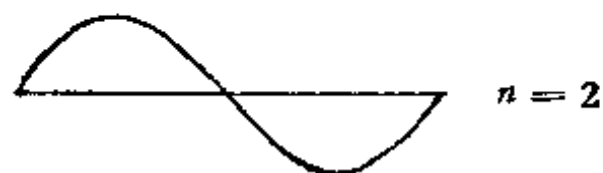
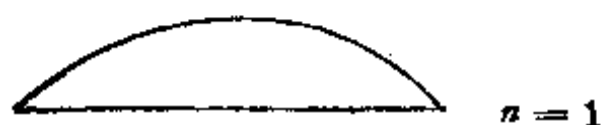
$B_1 = 0$, 以此代入式(1.51)并利用式(1.52)中的第二式, 有

$$-SkA_1E \sin kl(A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t) = 0.$$

此时 $A_1 \neq 0$, 否则式(1.50)为零解. 为满足上式, 要求



(a) 两端自由的棒



(b) 两端固定的棒

图 1.20 棒中的驻波图形

$$\sin kl = 0, \text{ 即 } kl = n\pi, \quad (1.54)$$

$$n = 1, 2, 3, \dots,$$

所以棒自由振动的固有频率为

$$f_n = \frac{n C_L}{2l}. \quad (1.55)$$

即棒进行自由振动的简正振动方式有无限个。

当 $n = 1$ 时, $f_1 = C_L/2l$ 称为自由振动的基频。两端自由时,纵振动的固有频率为基频的整倍数。在一般情况下,棒的振动位移为许多谐和分量之和。

$$\begin{aligned} \xi(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \cos k_n x \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \\ &\quad \cdot \cos \frac{n\pi}{l} x. \end{aligned} \quad (1.56)$$

图 1.20(a)表示 $n = 1, 2, 3$ 时振动位移在棒中的分布。

(ii) 两端固定的细棒

此时边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \xi(x, t)|_{x=0} &= 0, \\ \xi(x, t)|_{x=l} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.57)$$

由式(1.50)及边界条件(1.57)得

$$\sin kl = 0.$$

其固有频率与两端自由棒相同,但其位移分布却不一样,振动位移在棒的两端为零,如图 1.20(b)所示。

(iii) 一端自由一端固定的细棒

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} &= 0, \\ \xi(x, t)|_{x=l} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.58)$$

对式(1.50)及(1.58)进行类似的分析,可求得固有频率为

$$\cos kl = 0,$$

$$k_n l = (2n - 1) \frac{\pi}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (1.59)$$

$$f_n = (2n - 1) \frac{C_L}{4l}.$$

基频为两端自由棒的一半。由式(1.59)可见,泛音为基频的奇数倍。

前面曾提到,棒作纵向振动时,质点除作轴向纵振动外,由于泊松效应同时还作径向振动。这种径向振动又会影响纵振动的传播。

径向振动对纵振动的影响,可从振动能量变化的角度来分析。由于质点作横向振动,使系统的动能发生变化,增加了系统的惯性,从而使均匀棒的等效分布参数发生变化,影响波的传播速度。惯性增大时,波传播速度减小,因而对于长度相同的棒,增大截面会使固有频率下降。瑞利曾对细棒考虑横向振动时作固有频率的修正。其方法是先计算质点横向振动的动能,然后求其等效的附加质量,因而可以对固有频率进行修正,详见文献[8]。

3. 均匀细棒和电波传输线的类比,等效网络 上面讨论了棒在特定边界条件下的固有振动频率,现在讨论棒两端的一般情况,如图 1.21 所示。

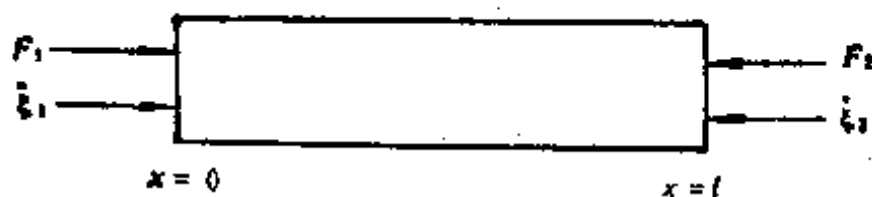


图 1.21 均匀细棒的纵振动

两端面的力和速度分别以 F_1, F_2 及 $\dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2$ 表示. 求端面力与振动速度的一般关系式. 前面式(1.50)可改写成

$$\xi(x, t) = (A \cos kx + B \sin kx) e^{j\omega t}, \quad (1.50')$$

则振动速度为

$$\dot{\xi} = j\omega(A \cos kx + B \sin kx) e^{j\omega t}, \quad (1.60)$$

应变

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = (-Ak \sin kx + Bk \cos kx) e^{j\omega t}. \quad (1.61)$$

边界条件为

$$F_1 = -SE \left. \frac{\partial \xi}{\partial x} \right|_{x=0}, \quad \dot{\xi}_1 = \left. \frac{\partial \xi}{\partial t} \right|_{x=0}, \quad (1.62)$$

$$F_2 = -SE \left. \frac{\partial \xi}{\partial x} \right|_{x=l}, \quad \dot{\xi}_2 = \left. \frac{\partial \xi}{\partial t} \right|_{x=l}. \quad (1.63)$$

以式(1.60)、(1.61)代入式(1.62)、(1.63), 可以解出 A, B , 即

$$A = \frac{\dot{\xi}_1}{j\omega} e^{-j\omega t},$$

$$B = -\left(\frac{\dot{\xi}_1}{j\omega \tan kl} + \frac{\dot{\xi}_2}{j\omega \sin kl} \right) e^{-j\omega t}. \quad (1.64)$$

以式(1.64)代入式(1.62)、(1.63)中得到棒两端力和振动速度的关系式为

$$\begin{cases} F_1 = \frac{S\rho C_L}{j \tan kl} \dot{\xi}_1 + \frac{S\rho C_L}{j \sin kl} \dot{\xi}_2, \\ F_2 = \frac{S\rho C_L}{j \sin kl} \dot{\xi}_1 + \frac{S\rho C_L}{j \tan kl} \dot{\xi}_2. \end{cases} \quad (1.65)$$

式中 $S\rho C_L = Z$ 是棒的特性力阻抗, S 为横截面积.

显然, 式(1.65)可以用一集中参数的等效 T 形网络来表示, 如图 1.22. T 形网络各元件虽然是以集中参数的形式画出, 但所代表的却是分布参数. 用等效网络的方法来分析由一些弹性元件联接的振动系统是很方便的.

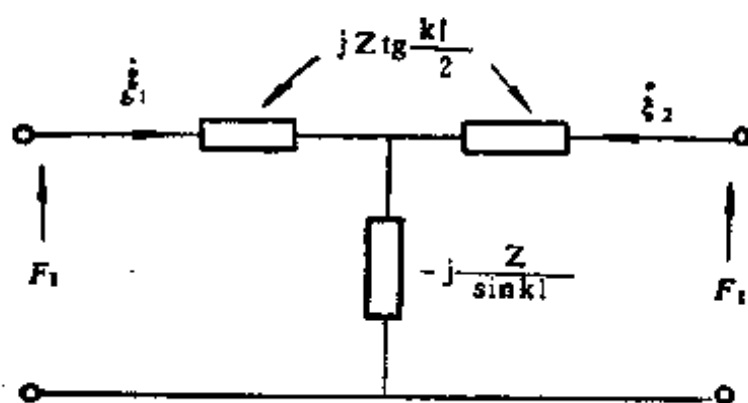


图 1.22 均匀细棒纵向振动的等效网络

以式 (1.60), (1.61) 代入式 (1.62) 解出 A, B , 并代入式 (1.60) 及 $F(x) = -SE \frac{\partial \xi}{\partial x}$ 中得到力和振动速度的分布表达式

$$\left. \begin{aligned} F(x) &= F_1 \cos kx - jZ \dot{\xi}_1 \sin kx, \\ \dot{\xi}(x) &= \dot{\xi}_1 \cos kx - j \frac{F_1}{Z} \sin kx. \end{aligned} \right\} \quad (1.66)$$

棒的始端 ($x = -l$) 的力和振动速度幅值为

$$\left. \begin{aligned} F(-l) &= F_1 \cos kl + jZ \dot{\xi}_1 \sin kl, \\ \dot{\xi}(-l) &= \dot{\xi}_1 \cos kl + j \frac{F_1}{Z} \sin kl. \end{aligned} \right\} \quad (1.67)$$

上面的关系式与电学中传输线方程的解相似。质点振动速度类比线上某点的电流, 而力类比于线上某点的线间电压。

由式 (1.67) 可以得到输入阻抗为

$$\begin{aligned} Z_i &= \frac{F}{\dot{\xi}} = \frac{F_1 \cos kl + jZ \dot{\xi}_1 \sin kl}{\dot{\xi}_1 \cos kl + j(F_1/Z) \sin kl} \\ &= \frac{Z_i + jZ \tan kl}{1 + j(Z_i/Z) \tan kl}, \end{aligned} \quad (1.68)$$

式中 $Z_i = F_1/\dot{\xi}_1$ 。

1.4.2 均匀棒的扭转振动

棒扭转振动的波动方程类似于纵振动。取棒的轴为 x 轴, 同时取棒的微小体元, 其长度为 dx , 在两端面作用力矩如图 1.23 所示。其运动方程可以写成

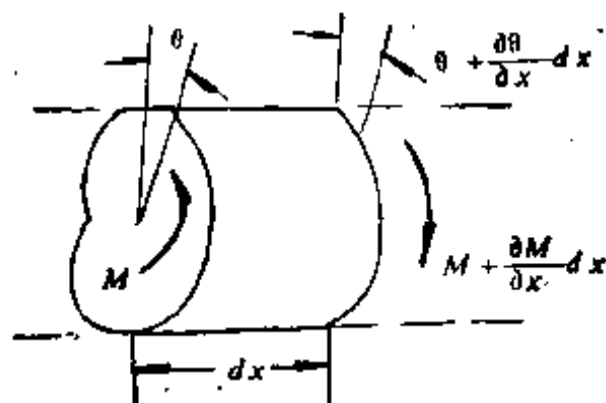


图 1.23 均匀棒的扭转振动

$$-M + \left(M + \frac{\partial M}{\partial x} dx \right) = \rho I dx \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \rho I \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}, \quad (1.69)$$

式中 I 是惯性矩, 力矩和扭转角 θ 的关系为

$$M = K \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad (1.70)$$

其中 K 是棒的抗扭刚度, 它决定于材料的剪切模量 G 和截面性质。将式(1.70)代入式(1.69), 可以得到波动方程

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\rho I}{K} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}. \quad (1.71)$$

可见, 波动方程的形式与纵振动的波动方程相似。

波动方程中出现的抗扭刚度 K 与材料的强度和截面的关

系较为复杂,对于圆截面的棒, $M = I G \frac{\partial \theta}{\partial x}$, 其中 $I = \pi a^4/2$,

a 是棒的半径。此时圆截面棒的波动方程为

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{1}{C_t^2} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}, \quad C_t = \sqrt{\frac{G}{\rho}}. \quad (1.72)$$

C_t 为传播速度,是材料中剪切波的传播速度。

下面给出三种截面的抗扭刚度 K

(i) 椭圆截面: 半长轴和半短轴分别为 a 和 b 时

$$K = \frac{\pi G a^3 b^3}{a^2 + b^2}. \quad (1.73)$$

(ii) 等边三角形: 高度为 a 时

$$K = \frac{G a^4}{15\sqrt{3}}. \quad (1.74)$$

(iii) 狭长方形: 宽 $2a$, 长为 $2b$ 且 $b \gg a$ 时

$$K = \frac{a^3 b G}{3}. \quad (1.75)$$

在超声振动系统中,圆截面棒的扭转振动是最常见的。

1.4.3 均匀棒的弯曲振动

在扬声器、微音器以及许多超声、水声换能器振动系统中,常常采用弯曲振动模式。因为在某些情况下,如在空气中辐射声波,弯曲振动模式在固有频率相同时,其结构尺寸比纵向振动模式的尺寸小得多,用弯曲振动模式作低频换能器时,其体积可以大大缩小。

当棒在其轴所在的平面里受到一个垂直于棒轴方向的力的作用时,棒就会产生弯曲形变,由于棒的劲度,棒要恢复其平衡状态,于是就在垂直轴的方向上发生振动。棒的这种振动方式称为棒的弯曲振动,或称为棒的横向振动。

考虑一截面为规则几何形状的均匀细棒。长为 l 、横截面积为 S 。棒轴方向用 x 坐标表示，棒在静止时处于水平位置。图 1.24 表示棒受到一垂直作用力而发生弯曲。我们在棒上取一元段 dx ，其两端坐标为 $x, x + dx$ 。由于棒的弯曲，就会产生弯矩。下面分析这种弯矩与棒的弯曲程度的关系。用图 1.25 表示该元段的纵截面。由于棒的弯曲，棒的横截面的上半部被拉伸，下半部被压缩。中间存在一个既不拉长也不缩短的中性面。在图 1.25 中取中线 AB 在 (x, y) 平面上的投影为中性面，因为中线长度不变，所以 $AB = dx$ 。设在棒的纵截面上距 AB 为 r 的距离处取一薄层 dr ，此薄层的

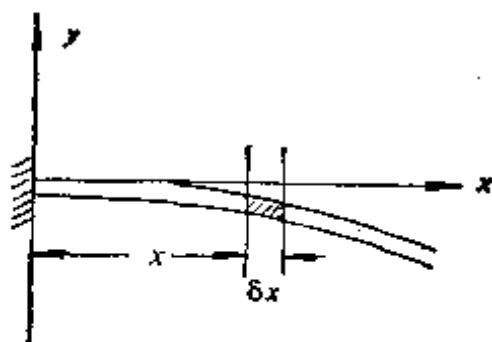


图 1.24 棒的弯曲运动

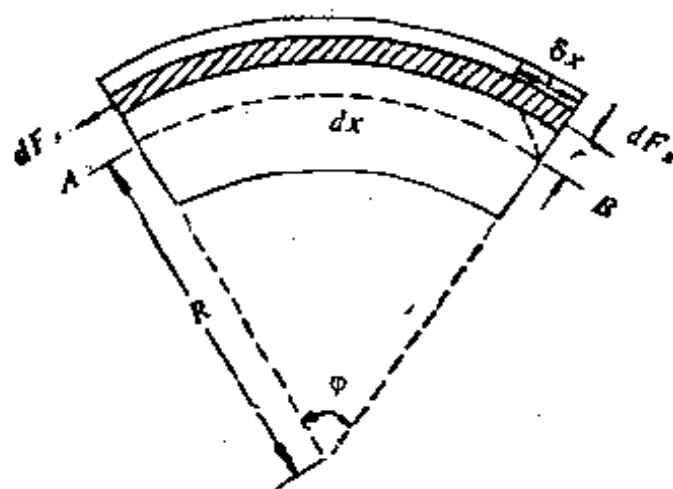


图 1.25 棒的元段分析

伸长为 δx ，因而其相对伸长为 $\delta x/dx$ 。根据图 1.25 的几何

关系,有 $\delta x = r\varphi$, $dx = R\varphi$. 这里 R 为中线 AB 的曲率半径, φ 为 AB 的张角. 由此可得相对伸长 $\frac{\delta x}{dx} = \frac{r}{R}$. 根据胡克定律,作用在 dS 面上的纵向力 (x 方向的力) 应为 $dF_x = -E \frac{r}{R} dS$. 在中线 AB 以上, 对该薄层产生拉力, 表示为负; 在 AB 线以下, 对该薄层产生压力, 表示为正. 因为中性面的上半部和下半部是对称的, 所以作用在该元段上总的纵向力正负抵消, 合成力为零. 然而在此纵向力作用下弯矩则不为零. 设在 r 处截面 dS 上的纵向力 dF_x 对中线的弯矩为 $dM_x = r dF_x = -\frac{E}{R} r^2 dS$, 则整个 x 截面上的弯矩为积分

$$M_x = \int_s -\frac{E}{R} r^2 dS = -\frac{E}{R} SK^2. \quad (1.76)$$

其中 $K^2 = \frac{1}{S} \int_s r^2 dS$, 对于一定横截面形状的棒是一常数,

R 称为截面回转半径. 例如, 横截面为矩形, 其厚度为 h 的棒, $K^2 = h^2/12$, 对于半径为 a 的圆形截面, $K^2 = a^2/4$.

设 y 为棒上各点离开平衡位置的距离, 按曲率半径 R 的数学表示可得

$$R = \left[1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right]^{3/2} / \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

在弯曲比较小的情形下, $\frac{\partial y}{\partial x} \ll 1$, 可略去二阶微量 $(\partial y / \partial x)^2$, 得曲率半径的近似式

$$R \approx 1 / \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

代入式(1.76)可得

$$M_x = -EK^2 S \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \quad (1.77)$$

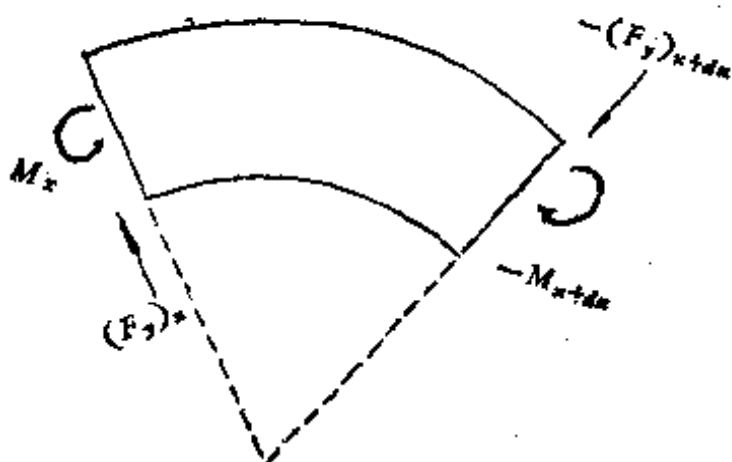


图 1.26 作用在元段上的弯矩

显然,弯矩 M_x 是坐标 x 的函数. 如图 1.26, 设 dx 的左邻段作用于 x 面上的弯矩为逆时针方向, 记为 M_x , 而右邻段作用于 $x+dx$ 面上的弯矩为顺时针方向, 记为 $-M_{x+dx}$, 于是作用在此元段上总弯矩为

$$M_x - M_{x+dx} = -\frac{\partial M_x}{\partial x} dx, \quad (1.78)$$

将式(1.77)代入得

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} = EK^2 \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}. \quad (1.79)$$

以上分析了作用在元段 dx 上纵向力产生的弯矩. 由于棒的弯曲, 在棒的每一横截面上还会产生切力. 若 dx 元段的左邻段作用于 x 面的切力向上, 记作 $(F_y)_x$, 按牛顿第三定律, 右邻段作用于 $x+dx$ 面上的切力方向就向下, 记作 $(F_y)_{x+dx}$, 见图 1.26. 因为考虑的是小弯曲振动, 可以认为棒不发生转动, 于是根据动量矩守恒定律, 由纵向力引起的弯矩应同切力产生的力矩相平衡, 即

$$F_y dx = \frac{\partial M_x}{\partial x} dx, \quad (1.80)$$

由此得

$$F_y = \frac{\partial M_x}{\partial x} = EK^2S \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}. \quad (1.81)$$

由于切力 F_y 一般也是 x 的函数, 故作用在整个 dx 元段上的总切力为

$$\begin{aligned} dF_y &= (F_y)_x - (F_y)_{x+dx} \\ &= -\frac{\partial F_y}{\partial x} dx = -EK^2S \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} dx. \end{aligned} \quad (1.82)$$

上式表示的是作用于元段 dx 上的总切力或称总横向力, 在此力作用下, 质量为 $\rho S dx$ 的元段产生横向加速度 $\partial^2 y / \partial t^2$, 按牛顿第二定律可得

$$dF_y = (\rho S dx) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad (1.83)$$

把式(1.82)代入, 经整理后可得

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -K^2 C^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}, \quad (1.84)$$

其中 $C^2 = E/\rho$, ρ 是棒材料的密度, 式(1.84)就是棒的弯曲振动方程。

我们用分离变量方法对振动方程(1.84)求解, 令

$$y(t, x) = Y(x)T(t) \quad (1.85)$$

将此式代入方程(1.84)得

$$-\frac{C^2 K^2}{Y(x)} \cdot \frac{d^4 Y(x)}{dx^4} = \frac{1}{T(t)} \cdot \frac{d^2 T(t)}{dt^2}. \quad (1.86)$$

要使上式成立, 必须使等号两边恒等于一常数, 设此常数为 $-\omega^2$, ($\omega^2 > 0$), 于是式(1.86)就可以分成二个独立的常微分方程,

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \omega^2 T(t) = 0, \quad (1.87)$$

$$\frac{d^4 Y(x)}{dx^4} - \frac{\omega^2}{C^2 K^2} Y(x) = 0. \quad (1.88)$$

式(1.87)的解为

$$T(t) = A_1 \cos(\omega t - \varphi), \quad (1.89)$$

对方程(1.88), 设其解为指数函数的形式, 令

$$Y(x) = e^{\gamma x}, \quad (1.90)$$

其中 γ 为待定的常数. 将式(1.90)代入方程(1.88), 得

$$\gamma^4 = \frac{\omega^2}{C^2 K^2}, \quad (1.91)$$

由此可解得 γ 有四个根, 即

$$\gamma = \pm \sqrt{\frac{\omega}{CK}} = \pm \frac{\omega}{v},$$

$$\gamma = \pm j \sqrt{\frac{\omega}{CK}} = \pm j \frac{\omega}{v}.$$

其中 $v = \sqrt{\omega CK}$, 因此式(1.88)的解为

$$Y(x) = A e^{\omega x/v} + B e^{-\omega x/v} + C e^{j(\omega x/v)} + D e^{-j(\omega x/v)},$$

而位移的解为

$$y(x, t) = (A e^{\omega x/v} + B e^{-\omega x/v} + C e^{j(\omega x/v)} + D e^{-j(\omega x/v)}) \cos(\omega t - \varphi). \quad (1.92)$$

式(1.92)中没有一项代表以速度 C_L 传播的波动. 例如考虑最后一项

$$y = D e^{j\omega(t-x/v)}$$

代表以速度 v 向右边传播的波, 但是 $v = \sqrt{\omega CK}$ 是频率的函数, 所以不同频率的波的传播速度不同, 即有频散.

利用指数函数与三角函数和双曲函数之间的关系

$$e^{\pm \theta} = \cosh \theta \pm \sinh \theta,$$

$$e^{\pm j\theta} = \cos \theta \pm j \sin \theta,$$

可以把式(1.92)的解写成

$$y(t, x) = \left[A_x \cosh \frac{\omega}{v} x + B_x \sinh \frac{\omega}{v} x \right. \\ \left. + C_x \cos \frac{\omega}{v} x + D_x \sin \frac{\omega}{v} x \right] \cos(\omega t - \varphi)$$

$$+ C_x \cos \frac{\omega}{v} x + D_x \sin \frac{\omega}{v} x \Big] \cos(\omega t - \varphi). \quad (1.93)$$

下面讨论几种情况:

(i) 一端固定一端自由的棒

在固定端,棒在固定点横向位移等于零,此外在该点棒的切线同固定界面垂直,因而其位移曲线的斜率也等于零;而在自由端,棒不受外界作用,因此其弯矩和切力矩都应等于零.

设棒在 $x = 0$ 端固定, $x = l$ 端自由,则有边界条件

$$\left. \begin{aligned} y_{(x=0)} &= 0 & \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{(x=0)} &= 0 \\ \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)_{(x=l)} &= 0 & \left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \right)_{(x=l)} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (1.94)$$

将式(1.93)代入可得 $A_x = -C_x$, $B_x = -D_x$, 并有如下关系

$$\left. \begin{aligned} A_x \left(\cosh \frac{\omega}{v} l + \cos \frac{\omega}{v} l \right) \\ + B_x \left(\sinh \frac{\omega}{v} l + \sin \frac{\omega}{v} l \right) &= 0 \\ A_x \left(\sinh \frac{\omega}{v} l + \sin \frac{\omega}{v} l \right) \\ + B_x \left(\cosh \frac{\omega}{v} l + \cos \frac{\omega}{v} l \right) &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (1.95)$$

这是一个二元一次代数方程组,若 A_x , B_x 为非零解,则它们的系数行列式应等于零,即

$$\begin{vmatrix} \cosh \frac{\omega}{v} l + \cos \frac{\omega}{v} l & \sinh \frac{\omega}{v} l + \sin \frac{\omega}{v} l \\ \sinh \frac{\omega}{v} l + \sin \frac{\omega}{v} l & \cosh \frac{\omega}{v} l + \cos \frac{\omega}{v} l \end{vmatrix} = 0. \quad (1.96)$$

由此可得

$$\cosh \frac{\omega}{\nu} l \cdot \cos \frac{\omega}{\nu} l = -1, \quad (1.97)$$

这是频率方程。设 $\beta = \frac{\omega}{\nu} l$ ，并用简正值 $\beta_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 代表 β 的一系列根值。当 $n > 3$ 时可用 $\beta_n = \frac{1}{2}(2n-1)\pi$ 来近似。一些低次 n 的简正值 β_n 列于表 1.1。

表 1.1

n	β_n	t_n/t_1
1	1.875	1
2	4.695	6.267
3	7.855	17.55
4	10.996	34.39

从 β_n 的值可得简正频率为

$$t_n = \frac{CK}{2\pi l^2} \beta_n^2. \quad (1.98)$$

由上式可以看出，一端固定一端自由的棒作弯曲振动时，其简正频率同棒长 l 的平方成反比。由表 1.1 可以看出， n 次的泛频已不是基频的整数倍，并且 n 增大，比值递增更快。

与第 n 次简正频率对应的简正振动方式可以写成

$$\begin{aligned} y_n(t, x) = & \left[A_n \left(\cosh \frac{\beta_n}{l} x - \cos \frac{\beta_n}{l} x \right) \right. \\ & \left. + B_n \left(\sinh \frac{\beta_n}{l} x - \sin \frac{\beta_n}{l} x \right) \right] \\ & \cdot \cos(\omega_n t - \varphi_n), \end{aligned} \quad (1.99)$$

其中 A_n 与 B_n 之间的关系由式(1.95)可得

$$B_n = A_n \left(\frac{\sin \beta_n - \sinh \beta_n}{\cos \beta_n + \cosh \beta_n} \right), \quad (1.100)$$

棒作弯曲振动时的总位移应表示为所有简正振动方式的迭加,即

$$y(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n Y_n(x) \cos(\omega_n t - \varphi_n). \quad (1.101)$$

其中

$$Y_n(x) = \left(\cosh \frac{\beta_n}{l} x - \cos \frac{\beta_n}{l} x \right) + \left(\frac{\sin \beta_n - \sinh \beta_n}{\cos \beta_n + \cosh \beta_n} \right) \cdot \left(\sinh \frac{\beta_n}{l} x - \sin \frac{\beta_n}{l} x \right). \quad (1.102)$$

由此式可以求出第 n 次振动方式的节点位置. 令 $Y_n(x) = 0$, 即得

$$\begin{aligned} & \left(\cosh \frac{\beta_n}{l} x - \cos \frac{\beta_n}{l} x \right) (\cos \beta_n + \cosh \beta_n) \\ &= \left(\sinh \frac{\beta_n}{l} x - \sin \frac{\beta_n}{l} x \right) (\sin \beta_n - \sinh \beta_n). \end{aligned} \quad (1.103)$$

用图解法解此方程可得节点的位置 x_{nm} . $n=1$ 到 $n=4$ 次简正振动的节点位置计算值列于表 1.2. 振动分布示于图 1.27(a). 图 1.27(b)则为两端自由时棒作弯曲振动的分布图.

表 1.2

$\frac{x_{nm}}{l}$	$\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}$	1	2	3	4
	1	0			
	2	0	0.7739		
	3	0	0.8679	0.5001	
	4	0	0.9056	0.6442	0.3561

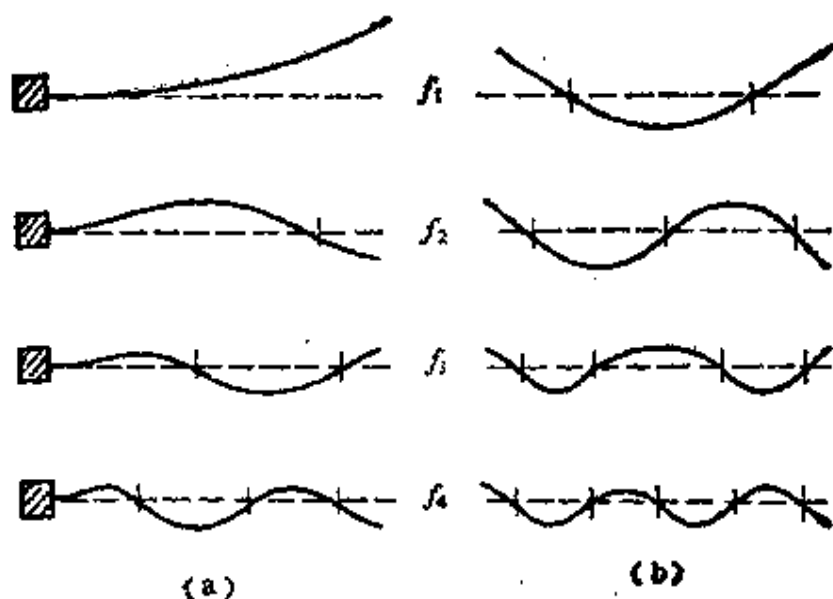


图 1.27 棒的弯曲振动分布

(a) 一端固定, 一端自由的棒,

(b) 两端自由的棒

(ii) 两端支撑的棒

当端点为刚性支撑时, 棒在该点横向位移为零, 由于在该端面不存在纵向力, 因而该端的弯矩 (或曲率) 等于零. 故其边界条件为

$$\left. \begin{aligned} y_{(x=0)} &= 0 & \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)_{(x=0)} &= 0, \\ y_{(x=l)} &= 0 & \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)_{(x=l)} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.104)$$

将式(1.93)代入, 可得 $A_x = C_x = 0$, 并且有如下关系

$$\left. \begin{aligned} B_x \sinh \frac{\omega}{v} l + D_x \sin \frac{\omega}{v} l &= 0, \\ B_x \sinh \frac{\omega}{v} l - D_x \sin \frac{\omega}{v} l &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.105)$$

由此可得非零解的关系为

$$\sinh \frac{\omega}{\nu} l \cdot \sin \frac{\omega}{\nu} l = 0. \quad (1.106)$$

由此可得二端支撑棒作弯曲振动时的频率方程为

$$\sin \frac{\omega}{\nu} l = 0. \quad (1.107)$$

解此正弦函数方程可得

$$\beta_n = \frac{\omega_n}{\nu} l = n\pi \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

由此得简正频率为

$$f_n = n^2 \frac{CK\pi}{2l^2}. \quad (1.108)$$

可见在两端支撑条件下,泛频是基频的整数倍,并且泛频与基频的比值为 n^2 . 按照式(1.105)以及当 $\omega > 0$ 时, $\sinh \frac{\omega}{\nu} l > 0$ 的条件,可以得到 $B_x = 0$, 因此第 n 次的简正振动方式为

$$y_n(t, x) = D_n \sin \frac{\beta_n}{l} x \cos(\omega_n t - \varphi_n). \quad (1.109)$$

由上式我们可以看到,在棒的中央位置 $x = \frac{l}{2}$ 的位移振幅,当 n 为奇数时,其振幅达到极大值 D_n , 而当 n 为偶数时振幅为零. 这就是说在同一位置,对于这一种振动方式它可以是波腹,而对于另一种振动方式它可以是波节.

如果棒的弯曲振动同时考虑迴转惯量和剪切变形,可以得到更精确的频率方程^[56].

1. 两端自由棒

当频率 $f < \frac{C}{2\pi} \sqrt{SK'G/l \cdot E}$ 时,频率方程为

$$1 - \operatorname{ch} \lambda_2 L \cdot \cos \lambda_1 L + A \cdot \operatorname{sh} \lambda_2 L \cdot \sin \lambda_1 L = 0, \quad (1.110)$$

式中

$$A = \frac{\frac{\omega}{C} \left[\frac{\omega^2}{C^2} \left(\frac{E}{K'G} - 1 \right)^2 + \frac{S}{I} \left(3 - \frac{E}{K'G} \right) \right]}{\frac{2S}{I} \left[\frac{S}{I} - \frac{\omega^2}{C^2} \cdot \frac{E}{K'G} \right]^{1/2}}$$

当 $\lambda_2 L \geq 6$ 时, 式(1.110)可简化为

$$L = \left(n\pi + \arctg \frac{1}{A} \right) / \lambda_1, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.111)$$

可以直接求得谐振长度(当给定频率及杆截面大小时).

2. 悬臂杆

当 $f < \frac{C}{2\pi} \sqrt{SK'G/IE}$ 时, 频率方程为

$$1 + D \cdot \operatorname{sh} \lambda_2 L \cdot \sin \lambda_1 L + B \cdot \operatorname{ch} \lambda_2 L \cdot \cos \lambda_1 L = 0. \quad (1.112)$$

式中

$$D = -\frac{\omega}{C} \left(\frac{E}{K'G} + 1 \right) / 2 \left[\frac{S}{I} - \frac{\omega^2}{C^2} \frac{E}{K'G} \right]^{1/2},$$

$$B = 1 + \left(\frac{E}{K'G} - 1 \right)^2 \frac{\omega^2}{C^2} \cdot \frac{I}{2S}.$$

当 $\lambda_2 L \geq 6$ 时可简化为

$$L = [n\pi + \arctg(-B/D)] / \lambda_1, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (1.113)$$

3. 两端固定棒

当 $f < \frac{C}{2\pi} \sqrt{SK'G/IE}$ 则频率方程为

$$1 - \operatorname{ch} \lambda_2 L \cdot \cos \lambda_1 L + P \cdot \operatorname{sh} \lambda_2 L \cdot \sin \lambda_1 L = 0. \quad (1.114)$$

式中

$$P = \left\{ \omega I \left[\left(\frac{S}{I} - \frac{E}{K'G} \cdot \frac{\omega^2}{C^2} \right) \left(3 \frac{E}{K'G} - 1 \right) + \frac{\omega^2}{C^2} \left(\frac{E}{K'G} \right)^2 \left(\frac{E}{K'G} + 1 \right) \right] \right\} /$$

$$\left\{ 2CS \left[\frac{S}{I} - \frac{E}{K'G} \cdot \frac{\omega^2}{C^2} \right]^{1/2} \right\}.$$

当 $\lambda_1 L \geq 6$ 时, 频率方程简化为

$$L = \left[n\pi + \arctg \left(\frac{1}{p} \right) \right] / \lambda_1, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.115)$$

以上的简化式误差小于 1%。式中符号为

E ——抗拉(压)弹性常数。

G ——剪切弹性常数。

I ——杆横截面对中性轴的惯性矩。

K' ——杆横截面不均匀剪切应力系数, 对圆形横截面 $K' = 1/1.11$, 对矩形截面 $K' = 1/1.2$ 。

S ——杆横截面积。

ρ ——杆材料密度。

f ——频率, $\omega = 2\pi f$, $C^2 = E/\rho$, $K' = \omega^2 S / C^2 I$ 。

L ——谐振杆长度, $a = (1 + E/K'G)\omega^2 / C^2$ 。

$$b = K'[1 - K'(I/S)^2 E / K'G]。$$

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{a}{2} + \sqrt{b + a^2/4}},$$

$$\lambda_2 = \sqrt{-\frac{a}{2} + \sqrt{b + a^2/4}}。$$

第六章 扭转振动变幅杆

§6.1 引言

随着超声在国民经济各个领域中的应用的扩大；超声技术得到不断的发展。除了纵振动之外，有时需要产生扭转振动，并加以放大。在功率超声的应用中，例如超声焊接、超声疲劳试验及振动切削等有时要用到扭转振动变幅杆来获得大扭转角或线切向的振动。

本章先讨论一般变截面杆的扭转振动方程，并与纵振动作比较，这样可以很方便地利用纵振动的一些结果来分析扭转振动问题。然后再列举指数形和阶梯形扭转振动变幅杆加以说明，最后讨论扭转振动系统的固定和隔振问题。

§6.2 变截面杆扭转振动的波动方程

分析时设杆为轴对称，其最大横向尺寸比杆的扭转振动声波波长小得多。这样，杆作扭转振动时，每一个截面可以认为是一个平面，且垂直于 x 轴(图 6.1)。处于横截面平面上的半径，扭转后不弯曲，应力值正比于由轴到观察点的距离。

设横截面的扭转角为 $\varphi(x, t)$ ，扭矩为 $M(x, t)$ 如图 6.1 所示。作用在 x 和 $x + dx$ 两平面所限定的单元上的扭转力矩为 $\frac{\partial M}{\partial x} dx$ ，这个力矩和角加速度 $\partial^2 \varphi / \partial t^2$ 和截面惯性矩 Θ 的乘积相平衡，即

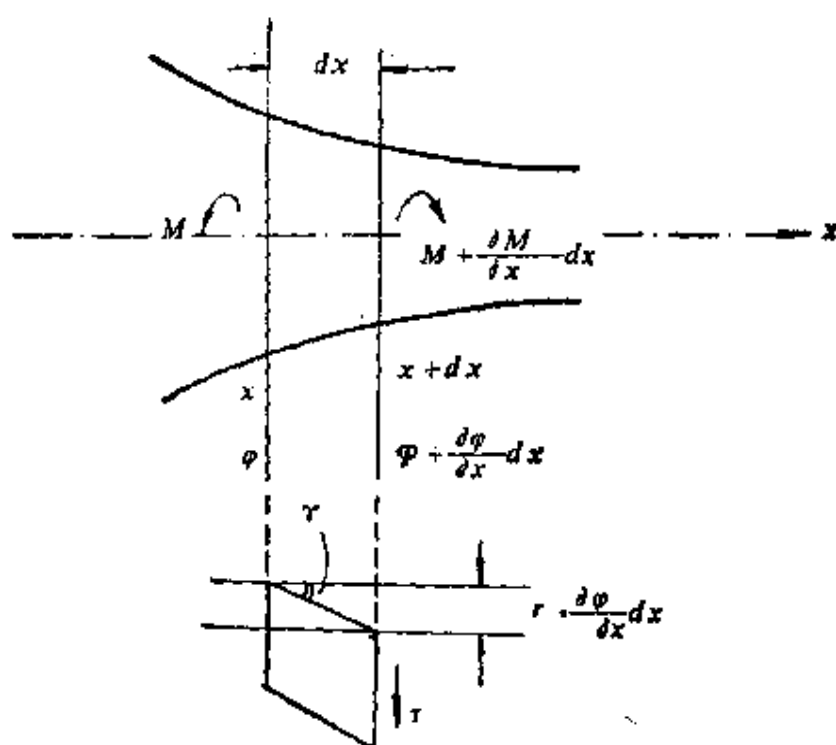


图 6.1 变截面杆的扭转振动

$$\frac{\partial M}{\partial x} dx = \Theta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (6.1)$$

当扭转振动时,所有处于 x 截面而距轴为 r 处,角度为 φ 的线段均由平衡位置移动 $r\varphi$,而在 $x + dx$ 截面的线段则移动 $r\left(\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx\right)$, 所以角形变 γ 为

$$\gamma = \frac{r\left(\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) - r\varphi}{dx} = r \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

切应力 $\tau = G\gamma = Gr \frac{\partial \varphi}{\partial x}$, G 为切变模量, 扭转力矩由下面积分表示:

$$\begin{aligned} M &= \int_s \tau r ds = \int_s Gr^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} ds \\ &= G \frac{\partial \varphi}{\partial x} \int_s r^2 ds = Gl \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \end{aligned} \quad (6.2)$$

其中 $I_p = \int_S r^2 dS$ 为棒截面的极惯性矩。 (6.3)

用下面积分定义惯性矩:

$$\Theta = \int r^2 dm = \int_S r^2 \rho dx dS = I_p \rho dx, \quad (6.4)$$

其中 ρ 为材料密度。

将 M 及 Θ 代入式 (6.1) 得

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{1}{I_p(x)} \cdot \frac{\partial I_p(x)}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\rho}{G} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

当扭转振动为谐和振动时有

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{1}{I_p(x)} \cdot \frac{\partial I_p(x)}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + k^2 \varphi = 0, \quad (6.5)$$

其中 $k = \omega / C_t$, ω 为圆频率, $C_t = (G/\rho)^{1/2}$ 为杆中横波的速度。

式 (6.5) 为变截面杆扭转振动的波动方程, 与第二章中变截面杆纵振动的波动方程 (2.2) 比较, 可以看出这两个方程是相似的。它们之间各量的对应关系为:

φ (扭转角) $\longleftrightarrow \xi$ (纵振动位移),

I_p (截面的极惯性矩) $\longleftrightarrow S$ (杆的横截面积),

$k_t (= \omega / C_t)$ $\longleftrightarrow k (= \omega / C)$ 。

因此, 分析纵向振动变幅杆所得的结果可以直接用到扭转振动变幅杆中来。

§ 6.3 指数形扭转振动变幅杆

6.3.1 放大系数

根据上节的类比关系, 图 6.2 的横截面极惯性矩 $I_p(x)$ 按指数规律沿 x 轴而减小

$$I_p(x) = I_{p1} e^{-ax}. \quad (6.6)$$

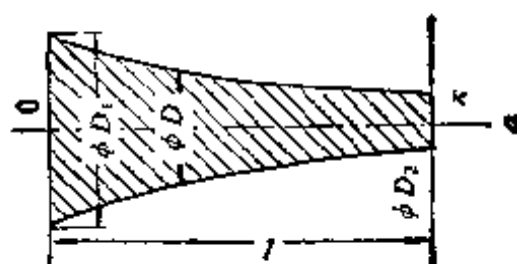


图 6.2

在杆的末端,即 $x = l$ 处,极惯性矩 $I_{p2} = I_{p1}e^{-\alpha l}$, 因此输出端与输入端扭转角振幅放大系数 K_φ 为

$$K_\varphi = \frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \sqrt{\frac{I_{p1}}{I_{p2}}} = N_I, \quad (6.7)$$

我们称 N_I 为惯性矩系数。

在实际应用中更有意义的是获得线切变位移振幅的放大,而不是扭转角的放大,因此研究管状扭转振动变幅杆更为重要。

外直径为 D 和内直径为 d (图 6.3) 的环的极惯性矩为

$$I_p = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4).$$

对实心指数杆 $I_p = \frac{\pi}{32} D^4$, 因此直径的变化规律为

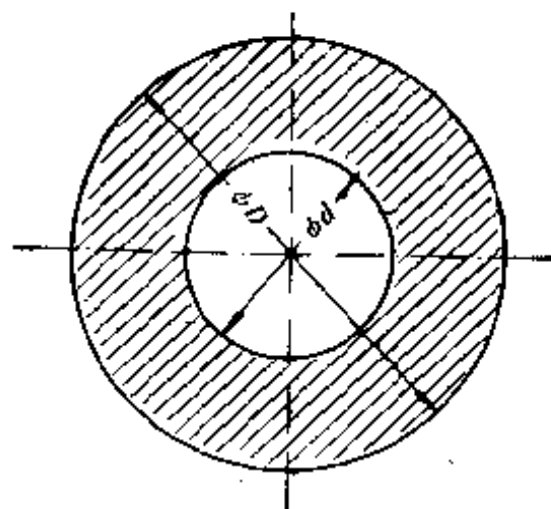


图 6.3

$$D = D_1 e^{-\frac{\alpha}{4} x},$$

$$K_\varphi = \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^2.$$

最大的线切变位移在杆的表面，因此线切变位移振幅放大系数 K_s 为

$$K_s = K_\varphi \cdot \frac{D_2/2}{D_1/2} = \frac{D_1}{D_2},$$

杆的长度

$$l = \frac{\lambda_K}{2}, \quad \lambda_K = \frac{C_K}{f},$$

相速度

$$C_K = \frac{C_s}{\sqrt{1 - \frac{\alpha^2 C_s^2}{4\omega^2}}}.$$

对于管状杆(图 6.4)有

$$d = D_1(1 - e^{-\alpha x})^{\frac{1}{2}},$$

$$K_\varphi = \left[1 - \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^4 \right]^{-1/2},$$

$$K_s = K_\varphi.$$

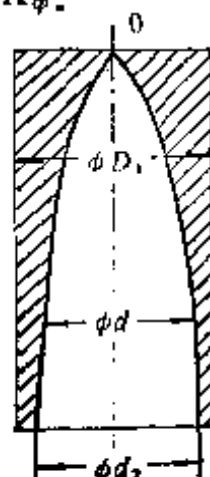


图 6.4

6.3.2 输入阻抗和波导特性

纵振动指数形变幅杆的输入阻抗为

$$Z_{in} = N^2 Z_L,$$

其中 $N = S_1/S_2$ 为变幅杆的大端和小端（输入和输出）面积比， Z_L 为总的负载声阻抗。

扭转振动指数杆的输入阻抗为

$$Z_{in} = N_t^2 Z_L.$$

对于输入端外直径为 D_1 、内直径为 d_1 ，输出端外直径为 D_2 、内直径为 d_2 的空心杆，惯性矩系数 N_t 和面积系数 N_r 之间有下列的关系：

$$N_t = \sqrt{\frac{D_1^4 - d_1^4}{D_2^4 - d_2^4}} = \sqrt{\frac{D_1^2 - d_1^2}{D_2^2 - d_2^2} \cdot \frac{D_1^2 + d_1^2}{D_2^2 + d_2^2}} = N \cdot N_r,$$

式中

$$N_r = \frac{D_1}{D_2} \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{d_1}{D_1}\right)^2}{1 + \left(\frac{d_2}{D_2}\right)^2}}$$

为几何系数，而且有

$$0.5 \leq \frac{1 + \left(\frac{d_1}{D_1}\right)^2}{1 + \left(\frac{d_2}{D_2}\right)^2} \leq 2.$$

如果设变幅杆末端的负载为一纯阻负载，阻抗率为 r_L ，它均匀分布在输出端横截面上，则可以用反射系数 δ 来描述其波导特性。

$$|\delta| = \left| \frac{\sqrt{1 + r_{LK}^2 - 2 \frac{r_{LK}}{Q}}}{\sqrt{1 + r_{LK}^2 + 2 \frac{r_{LK}}{Q}}} \right|, \quad (6.8)$$

其中

$$r_{LK} = r_L \cdot C_t / G, \quad Q = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\pi} \cdot \ln N_t\right)^2}.$$

而行波系数为

$$T = \frac{1 - |\delta|}{1 + |\delta|}$$

§ 6.4 阶梯形扭转振动变幅杆

6.4.1 放大系数

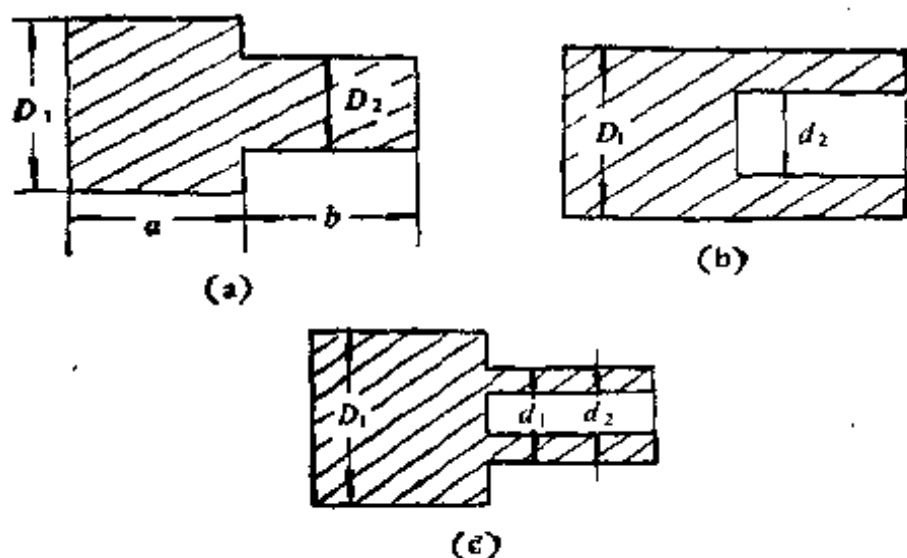


图 6.5 阶梯形扭振杆

对实心阶梯形变幅杆,如图 6.5(a),扭转角放大系数

$$K_\varphi = \frac{I_{p1}}{I_{p2}} = \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^4, \quad (6.9)$$

线切变位移振幅放大系数 K_t

$$K_t = K_\varphi \frac{D_2}{D_1} = \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^3. \quad (6.10)$$

对空心阶梯形,如图 6.5(b)

$$K_t = K_\varphi = \frac{D_1^4}{D_1^4 - d_1^4} = \frac{1}{1 - \left(\frac{d_1}{D_1}\right)^4}. \quad (6.11)$$

对图 6.5(c) 的空心阶梯形,则有

$$K_\varphi = \frac{(D_1/d_1)^4}{1 - (d_2/d_1)^4}, \quad (6.12)$$

$$K_s = K_\varphi \frac{d_1}{D_1} = \frac{(D_1/d_1)^3}{1 - (d_2/d_1)^4}. \quad (6.13)$$

6.4.2 输入阻抗和波导特性

输入端(大端)阻抗

$$Z_{in} = N_1^2 Z_L. \quad (6.14)$$

反射系数 δ 为

$$|\delta| = \left| \frac{1 - \frac{G}{N_1^2 r_L \cdot C_s}}{1 + \frac{G}{N_1^2 \cdot r_L \cdot C_s}} \right|. \quad (6.15)$$

6.4.3 在共振频率附近的等效网络

类比于纵振动阶梯形变幅杆的等效网络, 我们可以建立扭转振动变幅杆在共振频率附近的等效网络, 如图 6.6 所示.

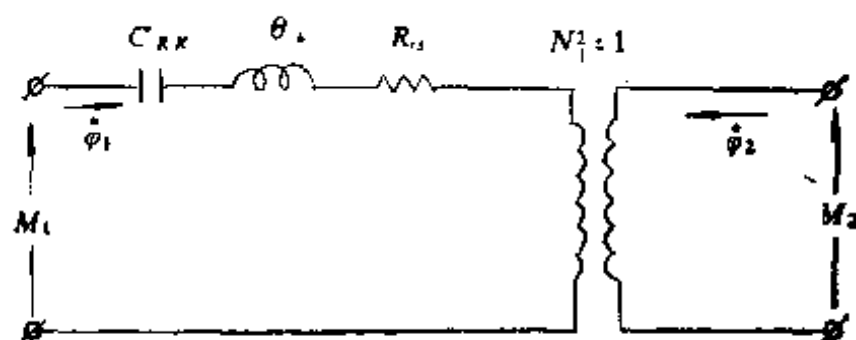


图 6.6 扭转振动棒在共振频率附近的等效网络

其中

$$N_1 = \frac{l_p(a)}{l_p(b)},$$

$$C_{RK} = \frac{4I_p(b)}{\pi^2 I_p(a)} \cdot \frac{l}{G[I_p(a) + I_p(b)]},$$

$$\Theta_K = \frac{1}{4} \cdot \frac{I_p(a)}{I_p(b)} \rho l [I_p(a) + I_p(b)],$$

$$I_p(a) = \frac{\pi}{2} R_a^4 - \frac{\pi}{32} D_a^4,$$

$$I_p(b) = \frac{\pi}{2} R_b^4 - \frac{\pi}{32} D_b^4.$$

$M_1, \dot{\phi}_1; M_2, \dot{\phi}_2$ 分别为输入端(大端)和输出端的扭矩和扭转角速度。

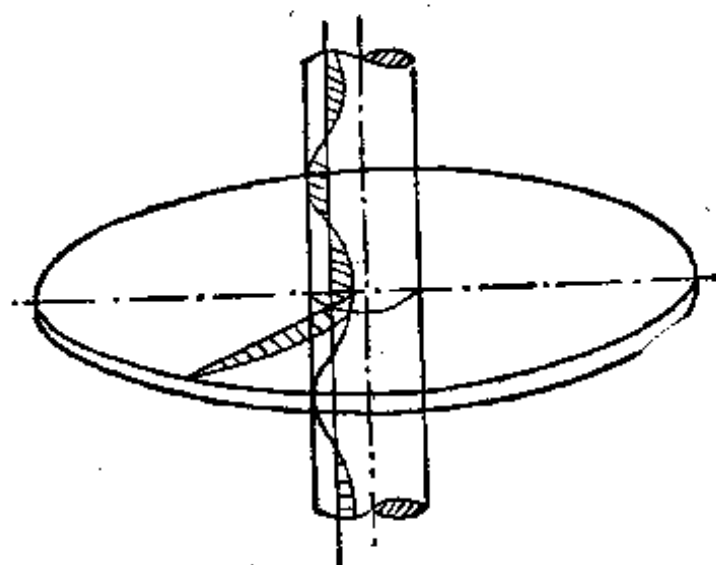
§ 6.5 扭转振动的隔振圆盘

在扭转振动系统中同样遇到如何将振动系统固定到不动的支架上而使声能耗散最小、且不会明显地影响振动系统声阻抗的问题。一个可能的方法与纵振动相类似，在振动节面处固定。但这种固定方法从结构和工艺观点来看往往不合适。下面讨论一种薄圆盘在平面中偏振的扭转振动。对图 6.7(a) 的振动系统首先写出波动方程，取圆盘外表面扭转角 φ 为零的边界条件，求出所需要的几何尺寸。圆盘内孔与杆件扭转振动系统连接，而外圆周作为固定支架则可以达到固定扭转振动系统而又使声能损失最小的目的。

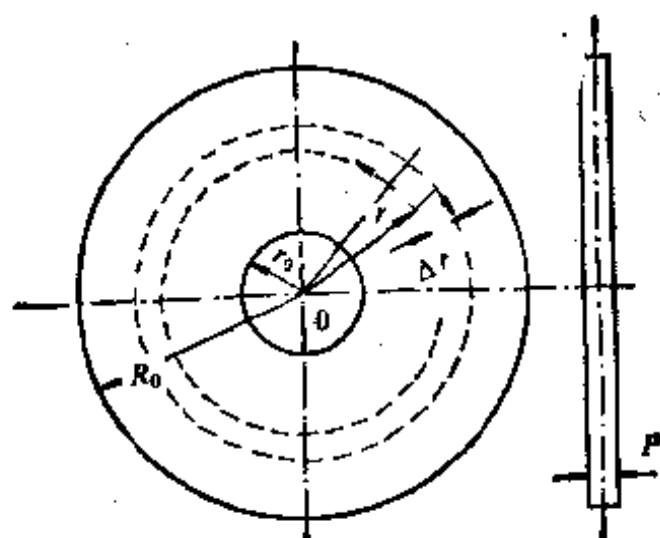
由图 6.7(b)，在盘上选择某一内半径 r ，外半径为 $r + \Delta r$ 的环。分析环的单元段的形变与环的旋转角 φ 的关系，可以得到作用在环上的总旋转力矩的表达式

$$M_{BP} = 2\pi PG \left[r^2 \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + 2r \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right] \Delta r.$$

沿环进行积分，可以写出力矩方程的惯性项



(a)



(b)

图 6.7 隔振圆盘

$$M_u = -2\pi P \rho r^3 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \Delta r.$$

力矩方程为

$$M_{Bp} + M_u = 0,$$

由此可以得到波动方程

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{C_s^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \quad (6.16)$$

波动方程的解可取下列形式

$\varphi = y(r)e^{j\omega t}$, 是谐和振动, 而 $y(r)$ 是盘中振幅分布函数. 则式 (6.16) 可写成

$$y'' + \frac{2}{r} y' + k^2 r y = 0. \quad (6.17)$$

式中 $k = \omega/C_s$. 若引入一新的函数 $Z = ry$, 代入波动方程, 进行变数替换 $r = x/k^{2/3}$, 经变换, 式 (6.16) 化为欧勒方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + xz = 0, \quad (6.18)$$

其解为

$$Z = AU_1(k^{2/3} \cdot r) + B \cdot U_2(k^{2/3} \cdot r),$$

式中 A 和 B 是决定于边界条件的任意常数, U_1 和 U_2 是一阶和二阶欧勒函数, 这些函数已有计算表.

扭转角的解为

$$\varphi = \frac{Z}{r} \cdot e^{j\omega t} = \left[\frac{A}{r} U_1(k^{2/3} r) + \frac{B}{r} U_2(k^{2/3} r) \right] e^{j\omega t}. \quad (6.19)$$

而切向应力表达式为

$$\begin{aligned} \tau &= r \cdot G \frac{\partial \varphi}{\partial r} \\ &= G \left\{ A \left[k^{2/3} \cdot U_1'(k^{2/3} \cdot r) - \frac{U_1(k^{2/3} r)}{r} \right] \right. \\ &\quad \left. + B \cdot k^{2/3} \left[U_2'(k^{2/3} r) - \frac{U_2(k^{2/3} r)}{r} \right] \right\} e^{j\omega t}. \end{aligned} \quad (6.20)$$

下面讨论三种情况.

6.5.1 自由振动

这种情况的边界条件是

$$r = r_0 \text{ 时 } \tau = 0$$

$$r = R_0 \text{ 时 } \tau = 0.$$

得到频率方程

$$\frac{k^{2/3} \cdot R_0 u'_1(k^{2/3} \cdot R_0) - u_1(k^{2/3} R_0)}{k^{2/3} \cdot R_0 u'_2(k^{2/3} R_0) - u_2(k^{2/3} R_0)} = \frac{k^{2/3} \cdot r_0 u'_1(k^{2/3} r_0) - u_1(k^{2/3} r_0)}{k^{2/3} \cdot r_0 u'_2(k^{2/3} r_0) - u_2(k^{2/3} r_0)} \quad (6.21)$$

6.5.2 盘内外表面都固定

边界条件为 $r = r_0$ 及 $r = R_0$ 时 $\varphi = 0$,
得频率方程

$$\frac{u_1(k^{2/3} R_0)}{u_2(k^{2/3} R_0)} = \frac{u_1(k^{2/3} r_0)}{u_2(k^{2/3} r_0)}. \quad (6.22)$$

6.5.3 圆盘外表面固定,内表面自由

边界条件为

$$r = r_0 \text{ 时 } \tau = 0,$$

$$r = R_0 \text{ 时 } \varphi = 0.$$

得频率方程

$$\frac{u_1(k^{2/3} R_0)}{u_2(k^{2/3} R_0)} = \frac{k^{2/3} \cdot r_0 u'_1(k^{2/3} r_0) - u_1(k^{2/3} r_0)}{k^{2/3} \cdot r_0 u'_2(k^{2/3} r_0) - u_2(k^{2/3} r_0)}. \quad (6.23)$$

为简化计算,引入一新的函数

$$U_1^*(S) = \frac{U_1(S)}{U_2(S)}, \quad S = k^{2/3} \cdot r,$$

$$U_2^*(S) = \frac{S \cdot U_1'(S) - U_1(S)}{S \cdot U_2'(S) - U_2(S)}.$$

改写上面的频率方程并列于表 6.1,利用表可以计算由各种边界条件组合的实际问题。计算时必须给出频率 f 及扭振声速 C_s ($k_s = 2\pi f / C_s$), 此外还需给出盘的一个半径, 通常给出内

半径 r_0 , 然后计算出外半径 R_0 .

表 6.1 频率方程

盘内缘 $r = r_0$ 处的边界条件	盘外缘 $r = R_0$ 处的边界条件	频 率 方 程
1. 自由 ($\tau = 0$)	自由 ($\tau = 0$)	$U_1^*(k^{2/3} \cdot r_0) = U_2^*(k^{2/3} \cdot R_0)$
2. 夹紧 ($\varphi = 0$)	自由 ($\tau = 0$)	$U_1^*(k^{2/3} \cdot r_0) = U_2^*(k^{2/3} R_0)$
3. 自由 ($\tau = 0$)	夹紧 ($\varphi = 0$)	$U_1^*(k^{2/3} \cdot r_0) = U_1^*(k^{2/3} R_0)$
4. 夹紧 ($\varphi = 0$)	夹紧 ($\varphi = 0$)	$U_1^*(k^{2/3} r_0) = U_1^*(k^{2/3} R_0)$

例: 设薄圆环的内表面与扭振棒相连, 如图 6.7(a) 所示, 连接处为扭转角振幅的腹点, 也就是切应力的节点 ($\tau = 0$), 而盘外缘固定, 相当于表 6.1 中的第三个条件.

给定工作频率 15 kHz, $C_s = 3.12 \times 10^5 \text{ cm/s}$, 内半径 $r_0 = 1.5 \text{ cm}$ 则 $k = \omega / C_s = 0.302$; $k^{2/3} = 0.45$, $k^{2/3} \cdot r_0 = 0.68$, 由此得

$$U_1^*(k^{2/3} r_0) = U_1^*(0.68) = 22.2,$$

而

$$U_1^*(k^{2/3} R_0) = U_2^*(k^{2/3} r_0) = 22.2,$$

求得 $0.45 R_0 = 2.68$, $R_0 = 5.96 \text{ cm}$. 即要求圆盘的外直径为 11.92 cm.

第五章 大横截面变幅杆·变幅器

§ 5.1 引言

前几章所讨论的变幅杆都假设杆的横向线度远小于声波波长,即所讨论的是“细杆”,没有考虑横向振动对纵向振动的影响。实际上,一杆件被激起纵向振动后,由于泊松效应,必然伴有横向振动,使杆的纵振动自然频率降低。在大横截面杆(例如截面线度大于四分之一波长)的情况下,横向振动的影响是不可忽略的。

在大功率超声应用,例如超声冷拔金属管,超声焊接等应用中,要求在被处理对象(工作区域)中引入大功率、高声强的超声,才能得到应有的效果。而要获得大功率、高声强的超声,往往需要一种大横截面的变幅杆系统,或者不是杆件系统,而是盘状或盘与杆的组合变幅器系统。在这种情况下,不但要考虑横向振动,而且有时还要利用纵向和横向振动的耦合来达到在特定的输出端获得大功率超声输出。

本章将简要地介绍大横截面杆及一些变幅器的设计方法。

§ 5.2 大横截面圆柱杆的振动

本节讨论两个问题:一是讨论大横截面圆柱杆考虑泊松效应时的纵向-横向振动方程。二是讨论圆柱杆沿轴向激发纵振动时要获得最大横向振动位移振幅时的最佳几何尺

寸。在超声冷拔金属管或丝的应用中有时用到这种振动系统。

现取 r, θ, z 作为圆柱坐标，相应的位移用 u_r, u_θ, u_z 表示，而圆柱的轴为 z 轴。Pochhammer 于 1876 年给出圆柱杆的振动方程为^[5]

$$\rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Delta}{\partial r} + 2\mu \frac{\partial \omega_\theta}{\partial z}, \quad (5.1)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Delta}{\partial z} - \frac{2\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \omega_\theta), \quad (5.2)$$

其中

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad (5.3)$$

$$\omega_\theta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \right), \quad (5.4)$$

ρ ——材料密度， λ, μ ——拉梅常数。

设 u_r 及 u_z 为坐标 z 及时间 t 的谐和函数，则方程(5.1)，(5.2)解的形式为

$$\begin{aligned} u_r &= u(r) \sin kze^{i\omega t}, \\ u_z &= v(r) \cos kze^{i\omega t}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

其中 $u(r)$ 及 $v(r)$ 仅为 r 的函数。

将式(5.5)代入式(5.1)，(5.2)并考虑式(5.3)，经整理后得 u_r 和 u_z 的表达式为

$$u_r = \left[A_1 \frac{dJ_0(h_1 r)}{dr} + k A_2 J_1(g_1 r) \right] \sin kze^{i\omega t}, \quad (5.6)$$

$$u_z = \left[k A_1 J_0(h_1 r) + A_2 \left(\frac{dJ_1(g_1 r)}{dr} + \frac{J_1(g_1 r)}{r} \right) \right] \cos kze^{i\omega t}, \quad (5.7)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} h_i^2 &= \frac{\omega^2 \rho}{\lambda + 2\mu} - k^2, \\ g_i^2 &= \frac{\omega^2 \rho}{\mu} - k^2. \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

k 为纵波沿 z 轴传播的波数, ω 为圆频率, J_0 及 J_1 为零阶和一阶贝塞尔函数。

设圆柱半径为 a , 当满足圆柱表面的边界条件时, 可以得到频率方程。这些边界条件为正应力及剪应力 σ_{rr} , τ_{rz} 在圆柱表面为零, 即

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr}(r=a) &= 0, \\ \tau_{rz}(r=a) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

而

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &= \lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r}, \\ \tau_{rz} &= \mu \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right). \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

考虑 (5.10), 将式 (5.6), (5.7) 代入式 (5.9) 得圆柱杆振动的频率方程

$$\begin{vmatrix} 2\mu \frac{d^2 J_0(h_i a)}{da^2} - \frac{\omega \rho \lambda}{\lambda + 2\mu} J_1(h_i a) & 2\mu \frac{d J_1(g_i a)}{da} \\ 2k \cdot \frac{d J_0(h_i a)}{da} & \left(2k^2 - \frac{\omega^2 \rho}{\mu} \right) J_1(g_i a) \end{vmatrix} = 0. \quad (5.11)$$

现在讨论如何获得最大横向振动的问题, 将式 (5.5) 代入式 (5.1), (5.2), 经整理后得^[22]

$$\left. \begin{aligned} & (\lambda + 2\mu) \left[\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} \right] \\ & - k^2 \mu u + \omega^2 \rho u - k(\lambda + \mu) \frac{dv}{dr} = 0, \\ & k(\lambda + \mu) \left[\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} \right] + \left[\mu \frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} \right] \\ & + [\rho \omega^2 - k^2(\lambda + 2\mu)] v = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

由微分方程组 (5.12) 解得

$$\begin{aligned} u_r &= [h_1 B_1 J_1(h_1 r) - g_1 B_2 J_1(g_1 r)] \sin kze^{i\omega t}, \\ u_z &= \left[k B_1 J_0(h_1 r) + \left(k - \frac{\rho \omega^2}{k\mu} \right) B_2 J_0(g_1 r) \right] \cos kze^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$\text{其中 } h_1 = \left[k^2 - \frac{\rho \omega^2}{\lambda + 2\mu} \right]^{1/2}; \quad g_1 = \left[\frac{\rho \omega^2}{\mu} - k^2 \right]^{1/2}, \quad (5.14)$$

B_1, B_2 为常数。

式 (5.13) 为圆柱杆中的横向和纵向位移的表达式。由此可以确定当杆沿轴向激发纵振动时得到最大横向振动振幅的最佳几何参数。其方法如下：

式 (5.13) 中的积分常数 B_1, B_2 由边界条件 (5.9)，即

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &= 0 \\ \tau_{rz} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{当 } r = a \text{ 时})$$

确定。将 u_r 及 u_z 对 r 及 z 微分，同时代入式 (5.10) 得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &= \left\{ \left[(\lambda + 2\mu) h_1 J_1'(h_1 r) \right. \right. \\ &+ \left. \frac{\lambda h_1}{r} J_1(h_1 r) - \lambda k^2 J_0(h_1 r) \right] B_1 \\ &- \left[(\lambda + 2\mu) g_1 J_1'(g_1 r) + \frac{\lambda g_1}{r} J_1(g_1 r) \right. \\ &+ \left. \left. \lambda k \left(k - \frac{\rho \omega^2}{\mu k} \right) J_1(g_1 r) \right] B_2 \right\} \sin kze^{i\omega t}, \end{aligned} \right\} \quad (5.15)$$

$$\tau_{rz} = 2\mu k \left[h_1 J_1(h_1 r) B_1 - g_1 \left(1 - \frac{\rho \omega^2}{2k^2 \mu} \right) J_1(g_1 r) B_2 \right] \cos k_z z e^{j\omega t}.$$

由贝塞尔函数性质有

$$\left. \begin{aligned} J_1'(g_1 r) &= g_1 J_0(g_1 r) - \frac{J_1(g_1 r)}{r}, \\ J_1'(h_1 r) &= h_1 J_0(h_1 r) - \frac{J_1(h_1 r)}{r}. \end{aligned} \right\} \quad (5.16)$$

考虑上式并将式 (5.15) 代入式 (5.9) 得

$$\left\{ [(\lambda + 2\mu)h_1^2 - \lambda k^2] J_0(h_1 a) - \frac{2\mu}{a} h_1 J_1(h_1 a) \right\} B_1 - 2\mu g_1 \left[g_1 J_0(g_1 a) - \frac{J_1(g_1 a)}{a} \right] B_2 = 0, \quad (5.17)$$

$$h_1 J_1(h_1 a) B_1 - g_1 \left(1 - \frac{\rho \omega^2}{2k^2 \mu} \right) J_1(g_1 a) B_2 = 0. \quad (5.18)$$

当给定圆频率 ω 及半径 a 时, 由 (5.17) 和 (5.18) 两个代数方程组可以得到求圆柱杆纵波传播的波数 k 的方程式

$$\left\{ [(\lambda + 2\mu)h_1^2 - \lambda k^2] J_0(h_1 a) - \frac{2\mu}{a} h_1 J_1(h_1 a) \right\} \cdot \left(1 - \frac{\rho \omega^2}{2k^2 \mu} \right) J_1(g_1 a) - 2\mu \left[g_1 J_0(g_1 a) - \frac{1}{a} J_1(g_1 a) \right] h_1 J_1(h_1 a) = 0. \quad (5.19)$$

如果在 $r = 0$ 和 $z = 0$ 时给定纵振动的振幅 u_{zm} 则积分常数 B_1 和 B_2 可由下式确定

$$\left. \begin{aligned} k B_1 + \left(k - \frac{\rho \omega^2}{k \mu} \right) B_2 &= u_{zm} \\ h_1 J_1(h_1 a) B_1 - g_1 \left(1 - \frac{\rho \omega^2}{2k^2 \mu} \right) J_1(g_1 a) B_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.20)$$

由上式得

$$B_1 = D_1/D_0, \quad B_2 = D_2/D_0. \quad (5.21)$$

其中

$$D_0 = \begin{vmatrix} k & k - \frac{\rho\omega^2}{k\mu} \\ h_1 J_1(h_1 a) & -g_1 \left(1 - \frac{\rho\omega^2}{2k^2\mu}\right) J_1(g_1 a) \end{vmatrix},$$

$$D_1 = -u_{zm} g_1 \left(1 - \frac{\rho\omega^2}{2k^2\mu}\right) J_1(g_1 a);$$

$$D_2 = -u_{zm} h_1 J_1(h_1 a).$$

将式 (5.21) 代入式 (5.13) 得在圆柱的外表面于 $Z = \pi/2k$ 处的横向振动振幅 u_{rm} 为

$$u_{rm} = h_1 \frac{D_1}{D_0} J_1(h_1 a) - g_1 \frac{D_2}{D_0} J_1(g_1 a). \quad (5.22)$$

由式 (5.19) 和式 (5.22) 可以确定获得最大横向振幅的最佳几何尺寸, 其步骤如下:

(i) 给定一个圆柱半径 $a = a_1$, 由式 (5.19) 求出相应的波数 k_1 .

(ii) 在 $Z = 0$, $r = 0$ 处给定一个 u_{zm} , 确定 B_{11} , B_{21} 和 u_{rm1} .

(iii) 再给定另一个半径 $a = a_2$, 求出相应的 k_2 及 u_{rm2} , 然后比较 u_{rm1} 和 u_{rm2} , 反复计算, 一直找到 u_{rm} 的最大值 $u_{rm(\max)}$ 为止, 并确定相应的 k 和 a 值.

为设计方便, 用计算机计算设计曲线如图 5.1 所示. 由图可以确定获得最大横向振动振幅 u_{rm} 的圆柱半径 a 和波数 k . 在给定共振频率后, 由 k 可求出所需的长度.

作为大横截面圆柱杆振动系统应用的例子如图 5.2 所示^[22]. 在圆柱杆上同时安装三个拉模, 拉模处于径向振动振幅最大的地方, 杆的两端用换能器推动.

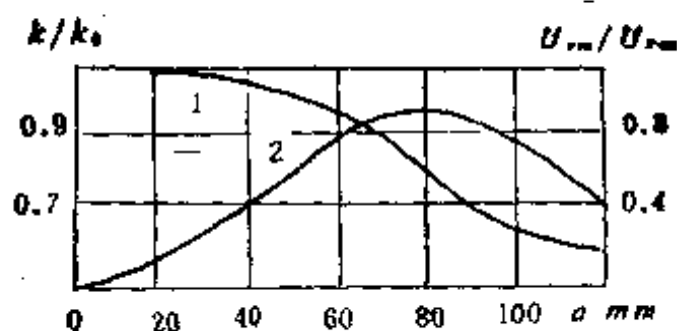


图 5.1 圆柱半径与波数的关系曲线。

1—— k/k_0 ; 2—— u_{rm}/u_{rm0}

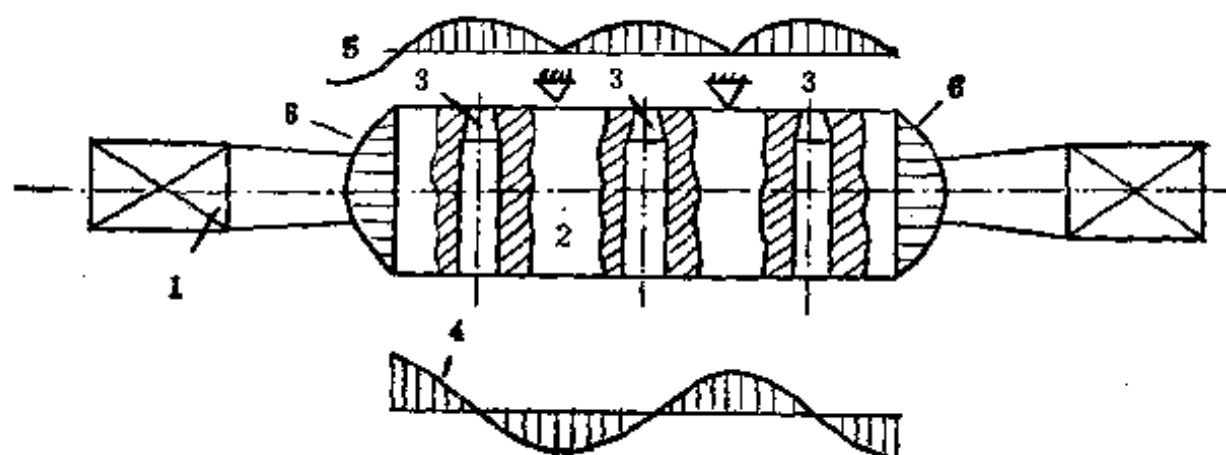


图 5.2 圆柱冷拔金属丝振动系统。

1——功率超声换能器；2——圆柱杆；3——拉模；4——纵向振动分布；
5——径向振动分布；6——圆柱杆顶部纵振动分布图

曾做 6 种不同半径的圆柱杆 ($a = 40, 50, 60, 70, 80, 90\text{mm}$) 作实验, 发现半径在 70—80 范围内得到最大的径向振动振幅, 而其长度在 121—135mm 范围内与理论计算很接近。

§ 5.3 圆盘形变幅器

在大功率超声应用中, 例如超声帮助冷拔金属丝、管, 为了集中能量, 获得大功率超声, 有时采用一种圆盘形变幅器。在实际应用中常采用中心开孔的变厚度的圆盘, 利用盘的径

向振动,在盘中心孔的内表面获得大功率的超声。

我们考虑在柱坐标 (r, θ, z) 系中的一对称圆盘,其厚度 T 以 $T = T(r)$ 的规律随半径 r 而变化,如图 5.3 所示。

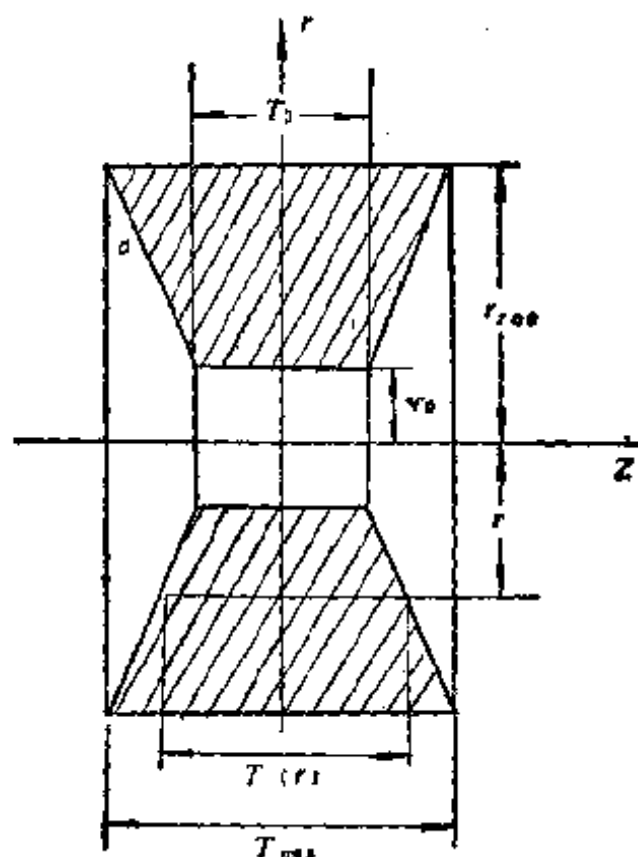


图 5.3 圆盘形变幅器

设径向和轴向位移分别为

$$u_r = u_r(r, t),$$

$$u_z = -\nu_p z \left[\frac{\partial u_r(r, t)}{\partial r} - \frac{u_r(r, t)}{r} \right].$$

其中 $\nu_p = \nu/(1 - \nu)$ 为板的泊松系数, ν 为材料的泊松系数, z 为盘轴向坐标, r 为半径, t 为时间。

设盘以圆频率 ω 作谐和振动, 径向位移 $u_r = \bar{u}_r e^{j\omega t}$, $\bar{u}_r$ 仅与 r 有关。写出圆盘振动的位能与动能表达式, 用变分方法^[20]可以得到考虑泊松效应时变厚度厚圆盘的径向振动微分方程。

$$\begin{aligned}
& \left(1 - \frac{k_p^2 v_p^2 T^2(r)}{12}\right) \frac{d^2 \bar{u}_r}{dr^2} + \left[\frac{1}{r} + \frac{1}{T(r)} \cdot \frac{dT(r)}{dr} - \frac{k_p^2 v_p^2 T^2(r)}{12} \left(\frac{1}{r} + \frac{3}{T(r)} \cdot \frac{dT(r)}{dr}\right)\right] \times \frac{d\bar{u}_r}{dr} \\
& + \left[k_p^2 - \frac{v}{rT(r)} \cdot \frac{dT(r)}{dr} - \frac{1}{r^2} + \frac{k_p^2 v_p^2 T^2(r)}{12} \cdot \left(\frac{1}{r^2} - \frac{3}{rT(r)} \cdot \frac{dT(r)}{dr}\right)\right] \times \bar{u}_r = 0. \quad (5.23)
\end{aligned}$$

其中

$$k_p = \omega / C_p, \quad C_p = [E / (1 - \nu^2) \rho]^{1/2}.$$

若不考虑泊松效应,例如薄圆盘的情况,方程(5.23)可简化为

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2 \bar{u}_r}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{T(r)} \cdot \frac{dT(r)}{dr}\right) \frac{d\bar{u}_r}{dr} \\
& + \left(k_p^2 + \frac{v}{rT(r)} \cdot \frac{dT(r)}{dr} - \frac{1}{r^2}\right) \bar{u}_r = 0. \quad (5.24)
\end{aligned}$$

而对于均匀厚度的薄圆盘则可进一步简化为

$$\frac{d^2 \bar{u}_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d\bar{u}_r}{dr} + \left(k_p^2 - \frac{1}{r^2}\right) \bar{u}_r = 0. \quad (5.25)$$

利用方程(5.23)及边界条件,当 $r = r_0$ 和 $r = r_{res}$ 时 $\sigma_{rr} = 0$, 取厚度变化规律为 $T(r) = T_0 + 2 \lg \alpha (r - r_0)$ 作数值计算,结果列于表 5.1,计算时取 $r_0 = 10\text{mm}$.

为验证理论,曾做了四个圆盘,其最大厚度为 $T_{0\max} = 80\text{mm}$, 最小厚度 $T_{0\min} = 20\text{mm}$, 其共振频率都以 17.850kHz 计算。计算值和实验结果列于表 5.2, 偏差不大。因此设计变厚度的厚圆盘作径向振动时(考虑泊松效应)在给定工作频率后,可利用式(5.23)计算所需要的几何尺寸,或直接利用表 5.2 的结果。

对于厚度按阶梯形或指数形变化的薄圆盘(不考虑泊松

表 5.1 $r_0 = 10\text{mm}$, $\nu = 0.28$, $\alpha = 5^{\circ}$

盘 厚 度 $T_0(\text{mm})$	共 振 频 率 f (kHz)				
	18	19	20	21	22
	$r_{res}(\text{mm})$				
20	90.00	86.20	82.40	78.60	74.80
30	89.50	85.70	81.90	78.10	74.30
40	88.80	85.00	81.20	77.40	73.60
50	87.75	83.95	80.14	76.35	72.65
60	86.60	82.20	78.40	74.60	70.80
70	84.10	80.30	76.70	72.90	69.10
80	82.05	78.25	74.45	70.65	66.85
90	79.80	76.00	72.20	68.40	64.60
100	77.30	73.50	69.70	65.90	62.10

表 5.2 $r_0 = 10\text{mm}$ $\alpha = 5^{\circ}$

厚 度 $T_0(\text{mm})$	外 径 $r_{res}(\text{mm})$	频 率 f (Hz)		偏 差 %
		计 算	实 验	
20	90.60	17850	17693	0.88
40	89.50	17850	17580	1.51
60	86.60	17850	17596	1.42
80	82.50	17850	17473	2.11

效应的影响),计算方法可参考文献 [26][37].

§5.4 $L-L-L$ 振动方向变换器

这一节讨论三棒和两棒互相垂直组成的 $L-L-L$ 及 $L-L$ 两种振动方向变换器。这种振动系统能将几个方向的振动

能量集中在一个方向上。选择合适的几何尺寸，可以在工作端面得到大的位移振幅和大功率超声。

5.4.1 L-L-L 振动方向变换器

这种振动系统如图 5.4 所示。

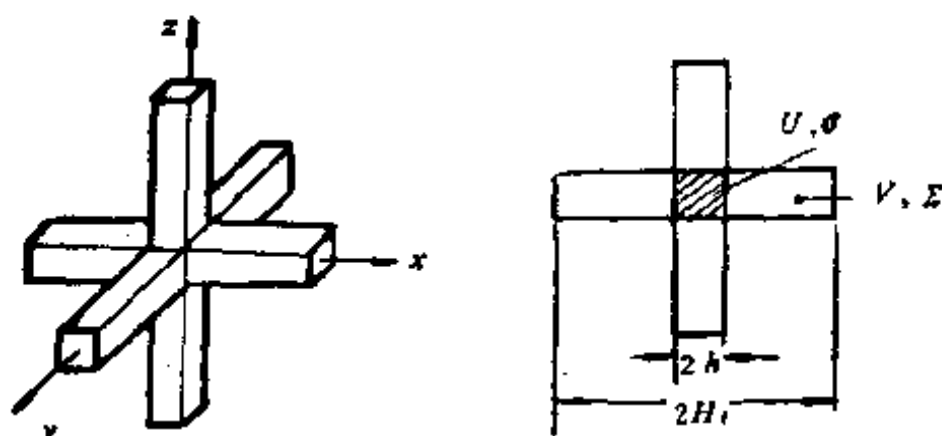


图 5.4 L-L-L 振动方向变换器

分析时不考虑损耗，并设棒的横向尺寸比纵向长度小得多，棒的中心交叉部分考虑泊松效应使各棒之间互相耦合。以 u_i, u_{ik}, σ_{ik} 表示棒交叉中心部分的位移、应变和应力分量；以 ξ, η 和 ζ 表示相应于 x, y 和 z 坐标轴方向棒自由端的位移振幅。坐标原点在变换器系统的中心，而坐标轴为各棒的轴

此时中心部分的位移和应力可写成

$$\begin{aligned} u_x &= akx, \quad u_y = bky, \quad u_z = dkz, \\ \sigma_{xx} &= \frac{Ek(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[a + \frac{\nu}{1-\nu} (b+d) \right], \\ \sigma_{yy} &= \frac{Ek(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[b + \frac{\nu}{1-\nu} (a+d) \right], \\ \sigma_{zz} &= \frac{Ek(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[d + \frac{\nu}{1-\nu} (a+b) \right]; \end{aligned}$$

而中心以外的部分的位移和应力可写成

$$U_x = \pm A \cos k(H_1 \mp x),$$

$$U_y = \pm B \cos k(H_2 \mp y),$$

$$U_z = \pm D \cos k(H_3 \mp z),$$

$$\Sigma_{xx} = EkA \sin k(H_1 \mp x),$$

$$\Sigma_{yy} = EkB \sin k(H_2 \mp y),$$

$$\Sigma_{zz} = EkD \sin k(H_3 \mp z).$$

其中 E, ν 为材料的杨氏模量及泊松比, $k = \frac{\omega}{C}$ 为圆波数, $C = (E/\rho)^{1/2}$ 为棒中的纵波速度, U 和 Σ 分别为棒中心以外部分的位移和应力分量. A, B, D 及 a, b, d 为任意常数.

问题的边界条件为

当 $x = \pm h, y = \pm h, z = \pm h$ 时

$$\sigma_{ii} = \Sigma_{ii}, \quad u_i = U_i, \quad (i = x, y, z).$$

$2h$ 为变换器中心立方体棱角长度. 将 u_i, U_i, σ_{ii} 及 Σ_{ii} 代入边界条件得到下列方程组:

$$\left. \begin{aligned} & A \cos k(H_1 - h) - akh = 0, \\ & B \cos k(H_2 - h) - bkh = 0, \\ & D \cos k(H_3 - h) - dkh = 0, \\ & A \sin k(H_1 - h) - \frac{(1-\nu)a}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ & \quad - \frac{\nu b}{(1+\nu)(1-2\nu)} - \frac{\nu d}{(1+\nu)(1-2\nu)} = 0, \\ & B \sin k(H_2 - h) - \frac{\nu a}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ & \quad - \frac{(1-\nu)b}{(1+\nu)(1-2\nu)} - \frac{\nu d}{(1+\nu)(1-2\nu)} = 0, \\ & D \sin k(H_3 - h) - \frac{\nu a}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ & \quad - \frac{\nu b}{(1+\nu)(1-2\nu)} - \frac{(1-\nu)d}{(1+\nu)(1-2\nu)} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.26)$$

由方程组 (5.26) 的系数行列式等于零可得到频率方程

$$\begin{aligned}
 & (kh)^3 \sin k(H_1 - h) \sin k(H_2 - h) \sin k(H_3 - h) \\
 & - \frac{(1 - \nu)(kh)^2}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} [\cos k(H_1 - h) \\
 & \times \sin k(H_2 - h) \sin k(H_3 - h) \\
 & + \sin k(H_1 - h) \cos k(H_2 - h) \sin k(H_3 - h) \\
 & + \sin k(H_1 - h) \sin k(H_2 - h) \cos k(H_3 - h)] \\
 & + \frac{kh}{(1 + \nu)^2(1 - 2\nu)} [\cos k(H_1 - h) \\
 & \times \cos k(H_2 - h) \sin k(H_3 - h) \\
 & + \cos k(H_1 - h) \sin k(H_2 - h) \cos k(H_3 - h) \\
 & + \sin k(H_1 - h) \cos k(H_2 - h) \cos k(H_3 - h)] \\
 & - \frac{1}{(1 + \nu)^2(1 - 2\nu)} \cos k(H_1 - h) \cos k(H_2 - h) \\
 & \times \cos k(H_3 - h) = 0. \tag{5.27}
 \end{aligned}$$

在此共振频率上解方程组 (5.26), 得振动方向变换共振器自由端的位移振幅表达式

$$\xi = A,$$

$$\eta = B = A \frac{\sin k_0(H_1 - h) - (1 + \nu)^{-1} \cos k_0(H_1 - h)}{\sin k_0(H_2 - h) - (1 + \nu)^{-1} \cos k_0(H_2 - h)},$$

$$\begin{aligned}
 \zeta = D = A \bigg\{ & \sin k_0(H_1 - h) \sin k_0(H_2 - h) \cdot (k_0 h)^2 \\
 & - \frac{1 - \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} k_0 h [\cos k_0(H_1 - h) \\
 & \times \sin k_0(H_2 - h) + \cos k_0(H_2 - h) \sin k_0(H_1 - h)] \\
 & + \frac{1}{(1 + \nu)^2(1 - 2\nu)} \cos k_0(H_1 - h) \cos k_0(H_2 - h) \bigg\} / \\
 & \left\{ \frac{\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \cos k_0(H_3 - h) \left[\sin k_0(H_2 - h) \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\cdot k_0 h - \frac{1}{1+\nu} \cos k_0 (H_2 - h) \Big] \Big\}, \quad (5.28)$$

其中

A 为任意不等于零的数, k_0 为共振时的圆波数.

现在根据频率方程 (5.27) 讨论两种情形:

1. 当 $H_1 = H_2 = H \approx H_3$ 时 方程 (5.27) 简化为两个

$$kh \sin k(H-h) - \frac{1}{1+\nu} \cos k(H-h) = 0, \quad (5.29)$$

$$\begin{aligned} & \left[kh \sin k(H-h) - \frac{1}{1+\nu} \cos k(H-h) \right] \\ & \times \left[kh \sin k(H-h) - \frac{1}{1-2\nu} \cos k(H-h) \right] \\ & \times \cos(k\Delta H) + \left[\frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} kh \sin^2 k(H-h) \right. \\ & - \frac{1}{(1-2\nu)(1+\nu)} \sin k(H-h) \cos k(H-h) \\ & + (kh)^2 \sin k(H-h) \cos k(H-h) \\ & \left. - \frac{kh}{(1+\nu)(1-2\nu)} \cos^2 k(H-h) \right] \sin(k\Delta H) = 0. \end{aligned} \quad (5.30)$$

其中 $\Delta H = H_3 - H$.

图 5.5 是在 $H_1 = H_2 = H = \text{常数}$ 下, 改变 H_3 由频率方程作数值计算得到的结果. 计算时取 $H_1 = H_2 = 25\text{mm}$, $h = 5\text{mm}$, $\nu = 0.29$, $C = 5400\text{m/s}$.

由图可见: $H_3 \approx H$ 时振动方向变换器有三个共振频率. 有一个比较高的频率相当于变换器中棒的同相振动; 有两个比较低的频率, 作反相振动. 其中有一个频率当 H_3 变化时并不改变, 即在此频率, 长为 $2H_3$ 的棒不振动, 这种情况在位移振幅分析中将进一步说明.

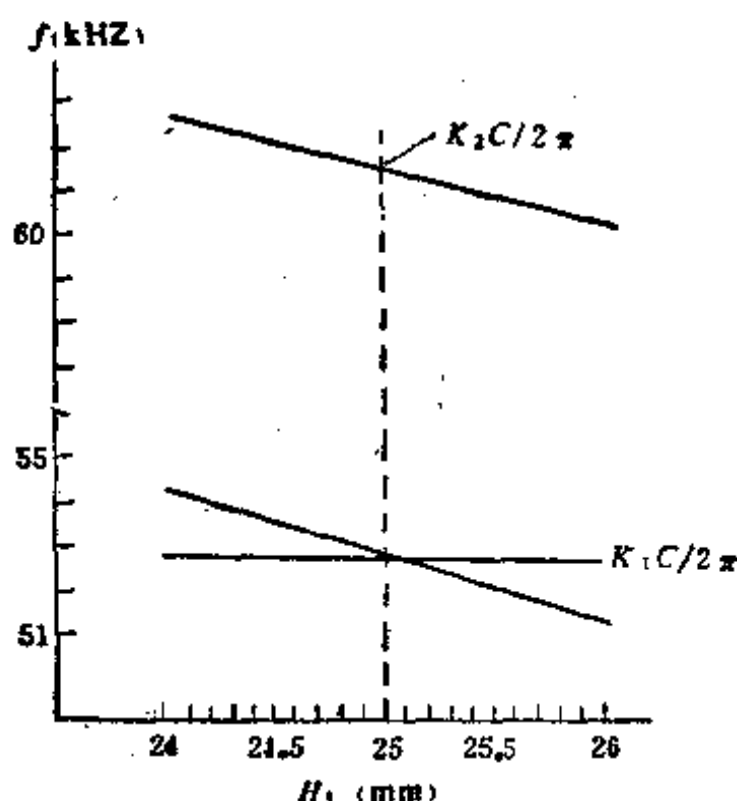


图 5.5 L-L-L 振动方向变换器共振频率与 H_3 的关系

由式 (5.28), 当 $H_1 = H_2 = H \approx H_3$ 且 $k_0 \approx k_1$ 时 (k_1 为较低频率的波数), 则位移振幅有

$$\xi = \eta = A,$$

$$\zeta = D$$

$$= A \frac{k_0 h \sin k_0(H-h) - \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} \cos k_0(H-h)}{\frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \cos k_0(H_3-h)}.$$

当 $k_0 = k_1$ 时, $\zeta = 0$ 即 $k = k_1$ 时有一根棒不振动而两根相等长度的棒作反相振动。

2. 当 $H_1 = H_2 = H_3 = H$ 时 方程 (5.27) 剩下三个方程, 两个方程与式 (5.29) 相同, 而第三个方程为

$$kh \sin k(H-h) - \frac{1}{1-2\nu} \cos k(H-h) = 0. \quad (5.31)$$

即有两个频率重合。若以 k_1 和 k_2 相应于式 (5.29) 和 (5.31) 的最低根, 显然 $k_1 < k_2$ 。由方程组 (5.26), 当 $H_1 = H_2 = H_3 = H$, $k = k_1$ 时有

$$\begin{aligned}\xi &= A, \\ \eta &= B, \\ \zeta &= -(A + B),\end{aligned}$$

A, B 为任意不等于零的数。

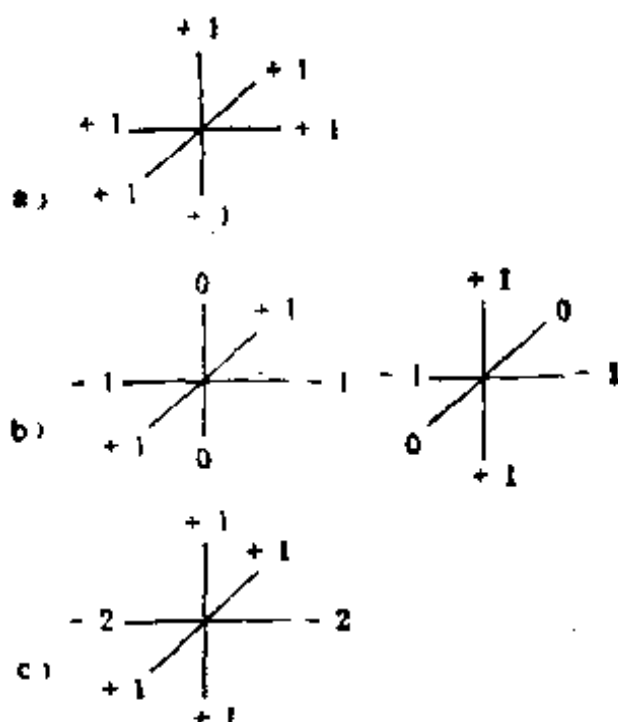


图 5.6 $L-L-L$ 振动方向变换器的振动模式

当 $k = k_2$ 时, $\xi = \eta = \zeta$ 。可见, 频率高的相应于变换器各棒作同相振动, 而低的频率相应于两个线性独立的反相振动。这些振动类型如图 5.6 所示。图 5.6(a) 表示同相振动, 图 5.6(b) 代表两个独立的反相振动, 其中有一根棒不振动, 而且与其长度无关。在 $H_1 = H_2 = H_3$ 的情况下, 棒元振动可以是任意的线性组合, 如图 5.6(c)。

表 5.3 给出理论计算和实验结果。由于实验用的变换器其棒的横截面积 S 与中心立方体边界棱角的面积 s 不同, 式

(5.29) 和 (5.31) 要以下面两个式子代替。

$$kh \sin k(H-h) - \frac{s}{S} \cdot \frac{1}{1+\nu} \cos k(H-h) = 0,$$

$$kh \sin k(H-h) - \frac{s}{S} \cdot \frac{1}{1-2\nu} \cos k(H-h) = 0.$$

表 5.3

参 量					实验结果		理论计算	
$2h(\text{mm})$	$2H(\text{mm})$	s/S	ν	$C(\text{m/s})$	$f_1(\text{kHz})$	$f_2(\text{kHz})$	$f_1(\text{kHz})$	$f_2(\text{kHz})$
15	44.2	1.275	0.29	5400	61.3	81.5	62.8	79.5
5	44.2	1.680	0.29	5400	62.9	66.9	61.6	66.9

5.4.2 L-L 振动方向变换器

两棒互相垂直的振动方向变换系统的频率方程可在三棒系统中令 $H_1 - h = 0$ (或 $H_2 - h = 0$ 或 $H_3 - h = 0$) 而直接得到

$$\begin{aligned} & (kh)^2 \sin k(H_1 - h) \sin k(H_2 - h) \\ & - \frac{kh}{1-\nu^2} [\sin k(H_1 - h) \times \cos k(H_2 - h) \\ & + \cos k(H_1 - h) \sin k(H_2 - h)] \\ & + \frac{1}{1-\nu^2} \cos k(H_1 - h) \cos k(H_2 - h) = 0. \end{aligned} \quad (5.32)$$

当 $H_1 = H_2 = H$ 时, 频率方程变成两个

$$kh \sin k(H-h) - \frac{1}{1+\nu} \cos k(H-h) = 0. \quad (5.33)$$

$$kh \sin k(H-h) - \frac{1}{1-\nu} \cos k(H-h) = 0. \quad (5.34)$$

设 k_1 和 k_2 为方程 (5.33) 和 (5.34) 的最小根, 易见 $k_1 <$

k_3 . 分析方程组 (5.26), 当 $H_1 = H_2 = H$, $H_3 - h = 0$ 时, 在 $k = k_1$ 时 $\xi = -\eta$, 而在 $k = k_3$ 时 $\xi = \eta$. 可见与三棒系统类似, 高频相应于两棒作同相振动, 而低频作反相振动. 由式 (5.33) 确定的两棒反相振动频率和三棒系统在 $H_1 = H_2$ 而第三棒不动时的反相振动频率 (5.29) 式一致. 说明上面三棒系统的两个反相频率与不振动棒的长度无关.

§ 5.5 R-L 振动方向变换器

5.5.1 均匀厚度圆盘和棒组成的振动方向变换器

这一节讨论由圆盘和与之垂直联接的棒组成的 R-L 振动方向变换器, 如图 5.7 所示. 这种振动系统能把径向振动的能量集中在中心部分并变换到棒的纵向振动, 常用于超声帮助冷拔金属管设备中.

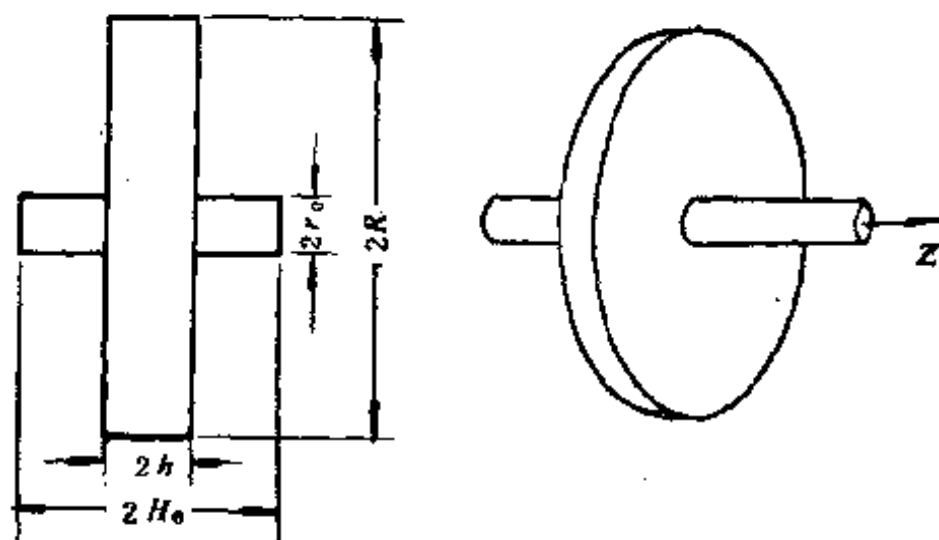


图 5.7 等厚度圆盘和棒组成的振动方向变换器

分析时仍然设没有损耗, 盘的厚度比其半径及棒的横向尺寸比其长度都小得多. 棒和盘交叉部分考虑泊松效应使振动互相耦合, 其余部分盘只作平面径向振动, 而棒只作纵向振

动。位移和应力的符号和上节取相同的规定，但圆盘取柱坐标。这样在盘和棒的交叉部分位移、应变和应力分别可写成

$$\begin{aligned} u_r &= ak_p r, \quad u_z = bkz, \\ u_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} = ak_p, \quad u_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} = ak_p, \\ u_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} = bk, \\ \sigma_{rr} &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\frac{1}{1-\nu} ak_p + \frac{\nu}{1-\nu} bk \right], \\ \sigma_{zz} &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[bk + \frac{2\nu}{1-\nu} ak_p \right]. \end{aligned}$$

盘和棒的非中心交叉部分为

$$\begin{aligned} U_z &= \pm D \cos k(H_0 \mp z), \\ \Sigma_{zz} &= E \cdot k \cdot D \sin k(H_0 \mp z), \\ U_r &= AJ_1(k_p r) + BN_1(k_p r), \\ \Sigma_{rr} &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial U_r}{\partial r} + \nu \frac{U_r}{r} \right] \\ &= \frac{Ek_p}{1-\nu^2} [Ay(k_p r) + Bn(k_p r)], \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} y(k_p r) &= J_0(k_p r) - (1-\nu) \frac{J_1(k_p r)}{k_p \cdot r}, \\ n(k_p r) &= N_0(k_p r) - (1-\nu) \frac{N_1(k_p r)}{k_p \cdot r}, \end{aligned}$$

$k_p = \omega/C_p$, $C_p = [E/\rho(1-\nu^2)]^{1/2}$, 为板中的纵波速度. J_0 和 J_1 为零阶和一阶第一类贝塞尔函数; N_0 及 N_1 为零阶和一阶第二类贝塞尔函数.

设盘的外直径为 $2R$, 厚度为 $2h$; 而棒的直径为 $2r_0$, 长度 $2H_0$, 则边界条件为

$$\left. \begin{aligned} &\text{当 } z = \pm h, r = r_0 \text{ 时,} \\ &\quad \Sigma_{ii} = \sigma_{ii}, U_i = u_i, (i = z, r). \\ &\text{当 } r = R \text{ 时,} \\ &\quad \Sigma_{rr} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.35)$$

将位移和应力的表达式代入边界条件可以得到一方程组，并由此方程组得到频率方程

$$\begin{aligned} &[y(k_p R)n(k_p r_0) - y(k_p r_0)n(k_p R)] \\ &\cdot \left\{ \frac{1 - \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \cos k(H_0 - h) \right. \\ &\quad \left. - kh \sin k(H_0 - h) \right\} k_p r_0 + [n(k_p R)J_1(k_p r_0) \\ &\quad - N_1(k_p r_0)y(k_p R)] \times [\cos k(H_0 - h) \\ &\quad - kh \sin k(H_0 - h)] \frac{1 - \nu}{1 - 2\nu} = 0. \end{aligned} \quad (5.36)$$

取 $r_0 = 3\text{mm}, 6\text{mm}, R = 52\text{mm}, h = 4.5\text{mm}, \nu = 0.29, C = 5400\text{m/s}$, 根据式 (5.36) 对不同的 H_0 值作数值解, 其结果如图 5.8 所示。

由图可见, 这种系统有两个频率。频率高的相应于同相振动, 低频相应于反相振动。在图上同时给出实验值。

如果盘和棒在中心交叉部分的尺寸比起盘或棒的尺寸都小得多, 则耦合较弱。棒比较长时, 高频接近于盘本身的自然频率, 这时借助于盘的尺寸来确定系统的共振频率, 在棒端可以得到较大的位移振幅。

在系统的共振频率工作时, $R-L$ 振动方向变换器自由端面的相对位移振幅可由下式表示:

$$\frac{\xi}{\chi} = \frac{h}{r_0} \cdot \frac{2\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \frac{[y(k_p R)N_1(k_p r_0) - J_1(k_p r_0)n(k_p R)]}{\quad}$$

$$\left\{ \left[\frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \cos k(H_0 - h) - kh \sin k(H_0 - h) \right] \times [J_1(k_p R) n(k_p R) - N_1(k_p R) y(k_p R)] \right\}, \quad (5.37)$$

其中 ξ 为棒端的位移振幅, χ 为盘端面的位移振幅。

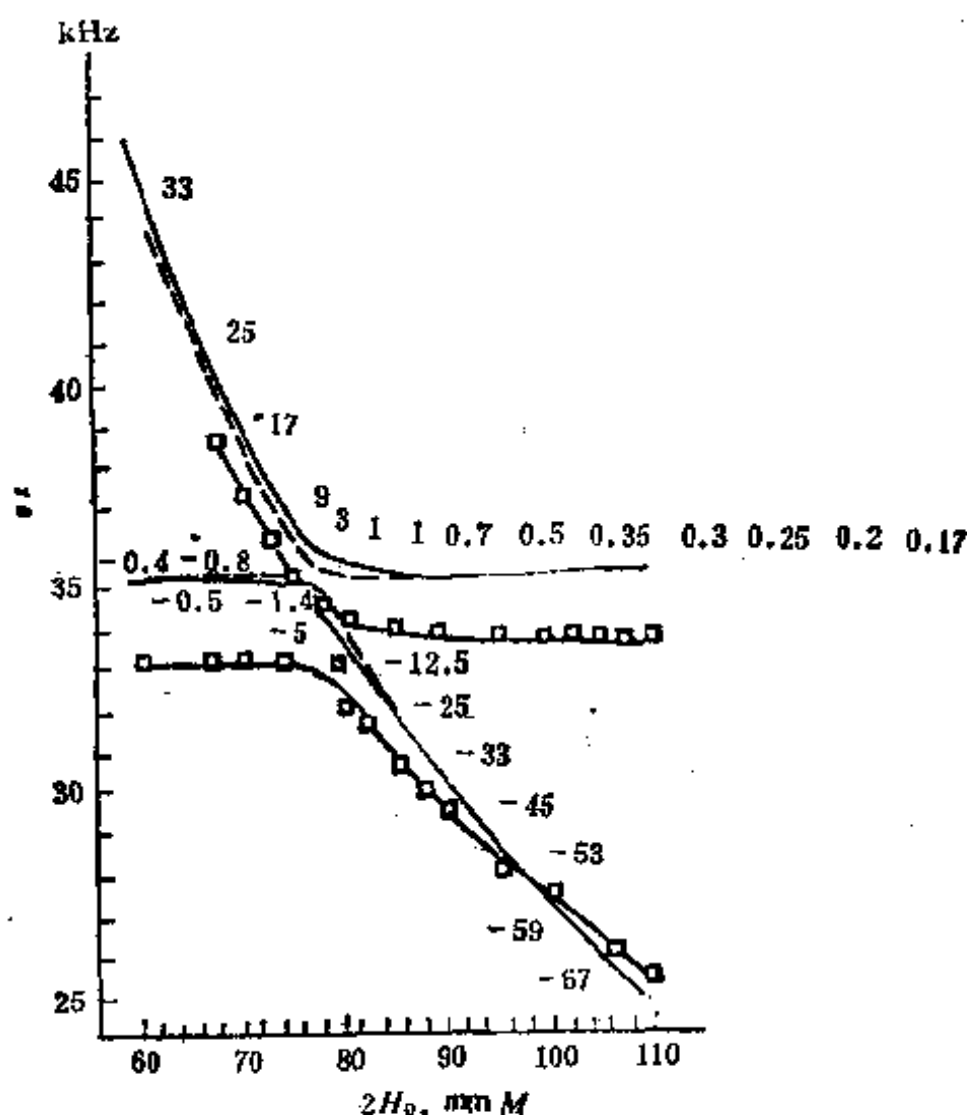


图 5.8 R-L 变换器共振频率依赖于 H_0 的理论和实验比较

5.5.2 变厚度圆盘和棒组成的振动方向变换器^[25]

上面所分析的圆盘是均匀厚度的情况, 如果圆盘的厚度

按一定规律由外向里逐渐变薄, 则这种 $R-L$ 振动方向变换系统在棒端可以得到更大的位移振幅, 也就是能够得到更大的位移振幅放大系数 η 。

与上面分析的假设条件一样, 但这时盘的厚度 $2h$ 按 $2h(r) = 2ar^n$ 指数律变化, 如图 5.9 所示。

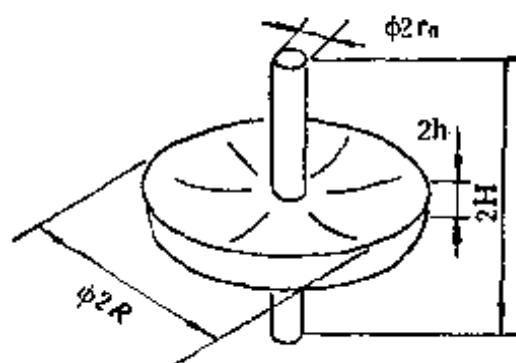


图 5.9 变厚度圆盘和棒组成的振动方向变换器

a 及 α 都为正常数, 则盘的径向位移 U_r 可用下式表示:

$$U_r = r^{-\frac{\alpha}{2}} \cdot Z_{1/2} \cdot \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha\nu + 4} (k_p r),$$

式中 $k_p = \omega/C_p$, $C_p = C_l/(1-\nu^2)^{1/2}$ 为盘中纵波速度, $C_l = (E/\rho)^{1/2}$, Z 为柱函数。

为简化计算, 选择 α 值使柱函数的阶为整数, 即令 $\alpha^2 - 4\alpha\nu + 4 = 4n^2$, 其中 $n = 1, 2, 3, \dots$, 此时除中心交叉部分之外, 盘的位移为

$$U_r = \frac{1}{r^{n+\sqrt{n^2+n^2-1}}} [A_1 J_n(k_p r) + B_1 N_n(k_p r)],$$

其中 J_n 及 N_n 为 n 阶第一和第二类贝塞尔函数, A_1, B_1 为常数。径向应力分量为

$$\begin{aligned} \Sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial U_r}{\partial r} + \nu \frac{U_r}{r} \right] \\ &= \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \frac{1}{r^{n+\sqrt{n^2+n^2-1}}} [A_1 y_0(k_p r) + B_1 n_0(k_p r)], \end{aligned}$$

其中

$$y_0(k_p r) = k_p J_{n-1}(k_p r) - \frac{n + \sqrt{v^2 + n^2 - 1}}{r} J_n(k_p r),$$

$$n_0(k_p r) = k_p N_{n-1}(k_p r) - \frac{n + \sqrt{v^2 + n^2 - 1}}{r} N_n(k_p r).$$

类似于前面的分析方法，由盘自由表面的边界条件及盘棒交叉边界条件可以得到频率方程

$$\begin{aligned} & \frac{1-v}{1-2v} [k_1 h_0 \sin k_1 (H - h_0) - \cos k_1 (H - h_0)] \\ & \times [y_0(k_p R) N_n(k_p r_0) - n_0(k_p R) J_n(k_p r_0)] \\ & - r_0 \left[k_1 h_0 \sin k_1 (H - h_0) \right. \\ & \left. - \frac{1-v}{(1+v)(1-2v)} \cos k_1 (H - h_0) \right] \\ & \times [y_0(k_p R) n_0(k_p r_0) - n_0(k_p R) y_0(k_p r_0)] = 0, \quad (5.38) \end{aligned}$$

式中 $k_1 = \omega / C_1$, $h_0 = h(r_0)$.

我们定义 R - L 振动方向变换器的放大系数 η 为棒端与盘自由柱表面的位移振幅之比，于是有

$$\begin{aligned} \eta = & \left| \frac{h_0}{r_0} \left(\frac{R}{r_0} \right)^{n + \sqrt{v^2 + n^2 - 1}} \cdot \frac{2v}{(1+v)(1-2v)} \right. \\ & \times [y_0(k_p R) N_n(k_p r_0) - n_0(k_p R) J_n(k_p r_0)] / \\ & \left\{ \left[k_1 h_0 \sin k_1 (H - h_0) - \frac{1-v}{(1+v)(1-2v)} \right. \right. \\ & \times \cos k_1 (H - h_0) \Big] [y_0(k_p R) N_n(k_p R) \\ & \left. \left. - n_0(k_p R) J_n(k_p R)] \right\} \right|. \quad (5.39) \end{aligned}$$

在 $n = 1$, $v = 0.29$, $C_1 = 5200 \text{ m/s}$, $R = 52 \text{ mm}$, $r_0 = 6 \text{ mm}$, $h_0 = h(r_0) = 0.52 \text{ mm}$, $\alpha = 1.16$, $h(R) = 6.4 \text{ mm}$ 时

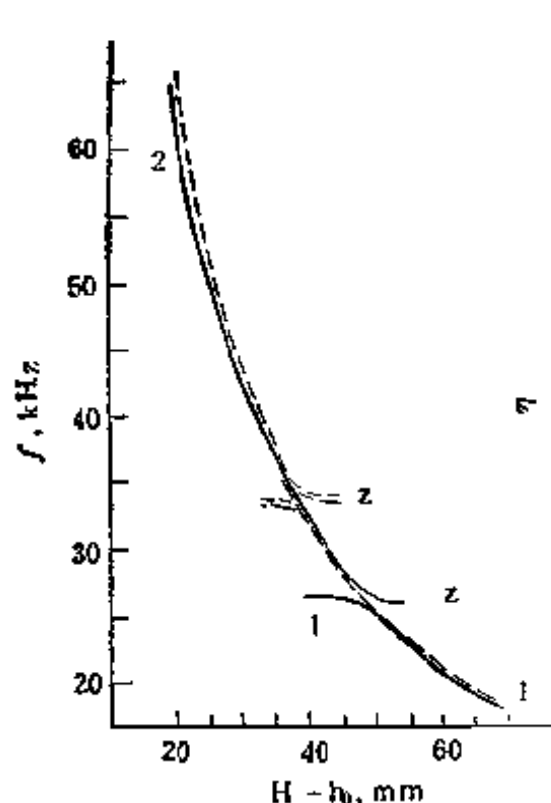


图 5.10 $R-L$ 变换器共振频率 f 与棒长 $H - h_0$ 的理论曲线

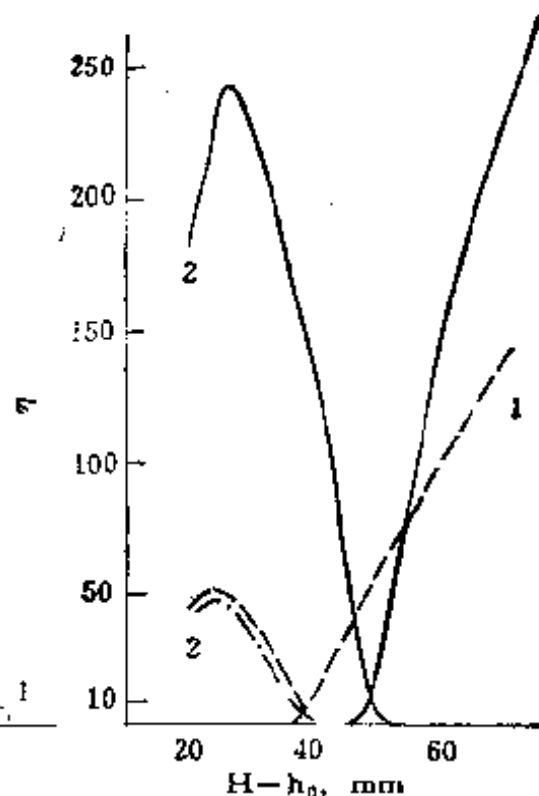


图 5.11 $R-L$ 变换器振幅放大系数 η 与棒长 $H - h_0$ 的理论曲线

对式 (5.38) 及 (5.39) 进行数值计算, 结果在图 5.10 及图 5.11 中给出。图中连续线表示变厚度盘的共振频率随 $H - h_0$ 的变化曲线; 而虚线表示均匀厚度盘的计算结果。由图 5.11 可见, 变厚度盘的位移振幅放大系数比均匀厚度圆盘大。

§ 5.6 轴心开孔的 $R-L$ 振动方向变换器

这种振动系统如图 5.12 所示, 由若干个超声换能器在圆盘的外周面激励盘作径向振动, 将能量集中在盘的中心部分, 并通过与其联接的棒变换为纵向振动, 在棒的末端得到大功率的超声。这种振动方向变换器常用于超声帮助冷拔金属管的设备中, 拔模装在棒的端部。

为便于分析这种复杂系统的振动, 将它分为三部分: 图

中 1 为第一部分, 作径向振动; 2 为第二部分作径向-纵向振动; 3 为第三部分作纵向振动。每一部分的近似振动方程分别为

第一部分:

$$\left. \begin{aligned} & \left(1 - \frac{k_p^2 \nu_p^2 T^2(r)}{12} \right) \frac{d^2 \bar{u}_{r1}}{dr^2} + \left[\frac{1}{r} + \frac{1}{T(r)} \cdot \frac{dT(r)}{dr} \right. \\ & \quad \left. - \frac{k_p^2 \nu_p^2 T^2(r)}{12} \left(\frac{1}{r} + \frac{3}{T(r)} \cdot \frac{dT(r)}{dr} \right) \right] \frac{d \bar{u}_{r1}}{dr} \\ & \quad + \left[k_p^2 + \frac{\nu}{r T(r)} \cdot \frac{dT(r)}{dr} - \frac{1}{r^2} \right. \\ & \quad \left. + \frac{k_p^2 \nu_p^2 T^2(r)}{12} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{3}{r T(r)} \cdot \frac{dT(r)}{dr} \right) \right] \bar{u}_{r1} = 0, \end{aligned} \right\}$$

第二部分:

$$\bar{u}_{r2} = A_1 J_1(k_p r) + A_2 Y_1(k_p r);$$

$$\bar{u}_{z2} = A_3 k_1 z,$$

第三部分:

$$\bar{u}_{z3} = A_4 \cos k_1(z - H),$$

(5.40)

其中 $J_1(k_p r)$, $Y_1(k_p r)$ 为贝塞尔函数, $k_1 = \omega/C_1$, $C_1 = (E/\rho)^{1/2}$, A_i 为常数 ($i = 1, 2, 3, 4$)

为解方程组 (5.40), 利用下列 6 个边界条件:

$$\left. \begin{aligned} & \text{当 } r = r_{cs} \text{ 时 } \sigma_{rr1} = 0, \\ & \text{当 } r = r_0 \text{ 时 } \sigma_{rr2} = 0, \\ & \text{当 } r = r_1 \text{ 时 } \sigma_{rr1} = \sigma_{rr2}, \bar{u}_{r1} = \bar{u}_{r2}, \\ & \text{当 } z = H \text{ 时 } \sigma_{zz2} = \sigma_{zz3}, \bar{u}_{z2} = \bar{u}_{z3}, \end{aligned} \right\} \quad (5.41)$$

其中

$$\sigma_{rr1} = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{d \bar{u}_{r1}}{dr} + \frac{\nu \bar{u}_{r1}}{r} \right];$$

$$\sigma_{rr2} = E A_1 \left[\frac{(1-\nu) k_p J_0(k_p r)}{(1+\nu)(1-2\nu)} - \frac{J_1(k_p r)}{(1+\nu)r} \right]$$

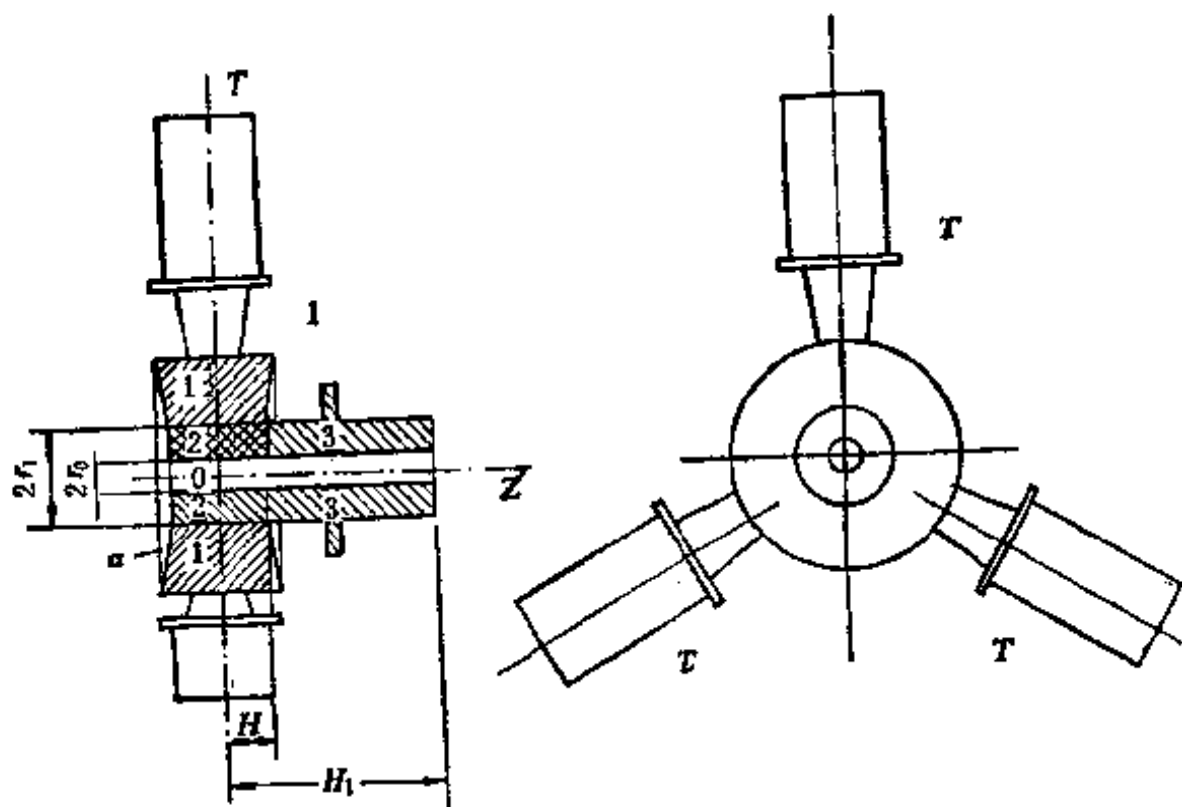


图 5.12 轴心开孔的 R-L 振动方向变换器 T——超声换能器

$$\begin{aligned}
 & + EA_2 \left[\frac{(1-\nu)k_p Y_0(k_p r)}{(1+\nu)(1-2\nu)} - \frac{Y_1(k_p r)}{(1+\nu)r} \right] \\
 & + EA_3 \frac{\nu k_1}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \\
 \bar{\sigma}_{zz} = & \frac{1}{S} \iint \sigma_{zz} dS \\
 = & \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ (1-\nu)k_1 A_3 \right. \\
 & + \frac{2\nu k_p}{r_1^2 - r_0^2} \{ A_1 [r_1 J_1(k_p r) - r_0 Y_1(k_p r)] \\
 & + A_2 [r_1 Y_1(k_p r_1) - r_0 Y_1(k_p r_0)] \} \}; \\
 S = & \pi(r_1^2 - r_0^2), \\
 \sigma_{zz} = & -Ek_1 A_4 \sin k_1(z-H).
 \end{aligned}$$

利用式 (5.40) 及边界条件 (5.41), 给定几何尺寸 H, H_1, r_0, r_1 , 厚度 $T(r)$ 及共振频率 f , 用计算机算出共振时圆盘的外半径 R_{res} . 当频率为 18 kHz, $r_1 = 32.5\text{mm}$ 及 50mm ,

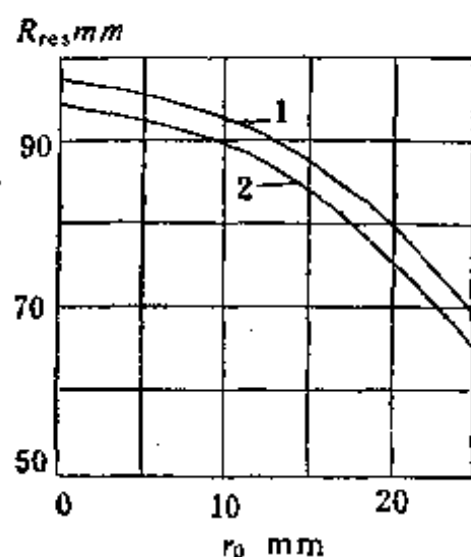


图 5.13 外半径 R_{res} 和内半径 r_0 的关系曲线

$T_{0min} = 70\text{mm}$ 和 90mm , $\alpha = 5^\circ$, $H = 35\text{mm}$ 和 45mm , $H_1 = 120\text{mm}$ 和 130mm 时, 计算外半径 R_{res} 和内半径 r_0 的关系曲线如图 5.13. 曲线 1 代表 $r_1 = 32.5\text{mm}$, $T_{0min} = 70\text{mm}$, $H = 35\text{mm}$, $H_1 = 120\text{mm}$, $\alpha = 5^\circ$; 而曲线 2 表示 $r_1 = 50\text{mm}$, $T_{0min} = 90\text{mm}$, $H = 45\text{mm}$, $H_1 = 130\text{mm}$, $\alpha = 5^\circ$ 时的计算曲线。

图 5.14 给出径向和纵向位移振幅分布的计算值和实验结果. 图中曲线 1 为理论曲线; 2 为实验结果。

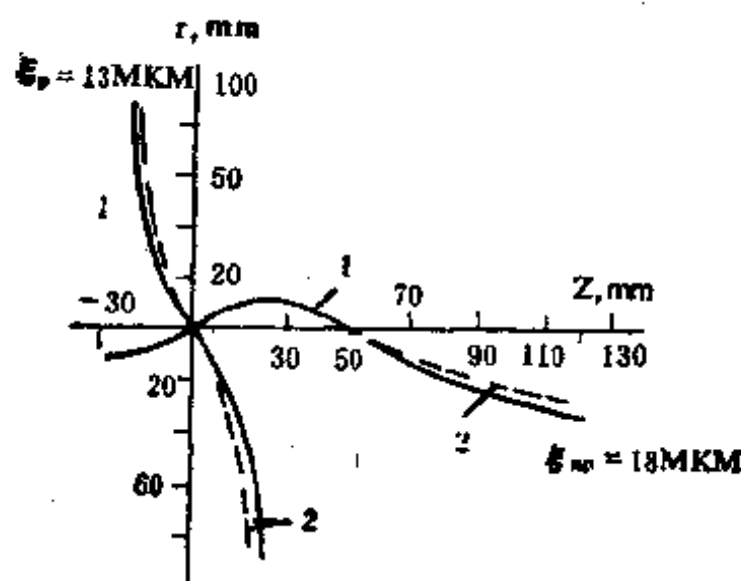


图 5.14 径向和纵向位移振幅分布的理论计算和实验结果比较

文献[22]曾做了四个不同几何尺寸的变换器,在圆盘外周面用三个频率为 $17,850 \pm 20\text{Hz}$ 的超声换能器推动。理论计算也取同一频率,理论计算和实验结果相差不超过 1.46%。同时,实验还表明,采用非对称结构(即只有圆盘的一面有联接棒),并且棒取 $(H_1 - T_0/2) > \lambda_1/4$ 时效率高而且节省材料,而系统的共振频率接近于对称结构的频率。

§ 5.7 负载对 $R-L$ 振动方向变换器 振动特性的影响

前面所讨论的振动方向变换器的共振频率及振幅分布都没有考虑负载的影响。本节以轴心开孔的 $R-L$ 振动方向变换器为例,讨论负载力阻抗 Z_L 对其振动特性的影响。在一般情况下负载阻抗为复数,由实部和虚部组成

$$Z_L = R_L + jX_L. \quad (5.42)$$

我们可以通过讨论振动系统的输入力阻抗 Z_{in} 来了解负载的影响。输入力阻抗 Z_{in} 定义为振动系统与振源联接点的力 F_{m0} 和振动速度 $\dot{\xi}_{m0}$ 之比,即

$$Z_{in} = F_{m0} / \dot{\xi}_{m0}. \quad (5.43)$$

由输入力阻抗的虚部我们可以找到系统的共振频率和调谐的条件。

现在我们来讨论图 5.15 所示的振动系统。由三个超声换能器共同推动 $R-L$ 径向振动变换为纵向振动的振动系统。纵向振动管的一端有负载力阻抗 Z_L 。我们将振动系统分为四部分(图 5.15),各部分的位移振幅可以表为

$$\bar{u}_{r1} = D_1 J_1(k_{p1}r) + D_2 Y_1(k_{p1}r),$$

(第一部分,等厚度圆盘) (5.44)

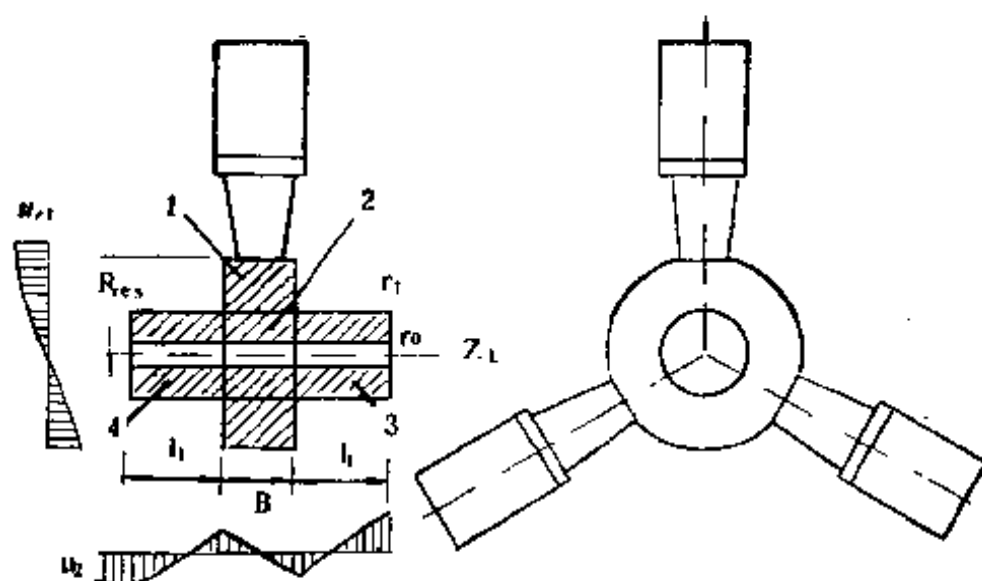


图 5.15 负载为 Z_L 的轴向开孔 R-L 振动变换器

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_{r2} &= D_3 J_1(k_p r) + D_4 Y_1(k_p r) \\ \bar{u}_{z2} &= D_5 \sin k_1 z + D_6 \cos k_1 z \end{aligned} \right\}.$$

(第二部分, 中心部分) (5.44a)

$$\bar{u}_{z3} = D_7 \sin k_1 \left(z - \frac{B}{2} \right) + D_8 \cos k_1 \left(z - \frac{B}{2} \right),$$

(圆柱管第三部分) (5.44b)

$$\bar{u}_{z4} = D_9 \sin k_1 \left(z + \frac{B}{2} \right) + D_{10} \cos k_1 \left(z + \frac{B}{2} \right),$$

(圆柱管第四部分) (5.44c)

其中

$$k_{p1} = \frac{k_p}{\sqrt{1 - \frac{k_p^2 \nu_p^2 B^2}{12}}}; \quad k_1 = \frac{k}{\sqrt{1 - \frac{k^2 \nu^2 (r_1^2 - r_0^2)}{2}}}.$$

B 为圆盘的厚度, $\nu_p = \nu / (1 - \nu)$.

为确定常数 D_i , 利用下列边界条件

$$\left. \begin{aligned}
& \text{当 } r = R_{res} \text{ 时 } \sigma_{rr1} S_1 = j\omega u_n Z_{in}, \\
& \text{当 } r = r_1 \text{ 时 } \sigma_{rr1} = \sigma_{rr2}, \bar{u}_{r1} = \bar{u}_{r2}, \\
& \text{当 } r = r_0 \text{ 时 } \sigma_{rr2} = 0, \\
& \text{当 } z = -\frac{B}{2} \text{ 时 } \bar{u}_{z1} = \bar{u}_{z4}, \sigma_{zz2} = \sigma_{zz4}, \\
& \text{当 } z = \frac{B}{2} \text{ 时 } \bar{u}_{z2} = \bar{u}_{z3}, \sigma_{zz2} = \sigma_{zz3}, \\
& \text{当 } z = -\frac{B}{2} - l_1 \text{ 时 } \sigma_{zz4} = 0, \\
& \text{当 } z = \frac{B}{2} + l_1 \text{ 时 } \sigma_{zz3} = \frac{j\omega z_L}{S_3} \bar{u}_{z3}.
\end{aligned} \right\} \quad (5.45)$$

其中

$\sigma_{rr1}, \sigma_{rr2}$ ——在 1, 2 部分径向方向的应力;

$\sigma_{zz2}, \sigma_{zz3}, \sigma_{zz4}$ ——2, 3, 4 部分沿 z 轴方向的应力;

r_0, r_1 ——第 3 部分圆管内外表面半径;

R_{res} ——第 1 部分圆盘的外表面半径;

S_1, S_2 ——第 1, 2 部分外表面面积;

S_3 ——第 3 部分的横截面积。

与前面类似, 将给出的各应力分量的表达式及位移表达式代入边界条件 (5.45), 可以得到一代数方程组, 解该方程组, 最后得到下列方程式:

$$\begin{aligned}
& -M_1\Delta_1 + M_2\Delta_2 + M_3\Delta_3 - M_4\Delta_4 \\
& + j(-N_1\Delta_1 + N_2\Delta_2 + N_3\Delta_3 - N_4\Delta_4) = 0, \quad (5.46a)
\end{aligned}$$

上式可改写成

$$\left. \begin{aligned}
& -M_1\Delta_1 + M_2\Delta_2 + M_3\Delta_3 - M_4\Delta_4 = 0 \\
& -N_1\Delta_1 + N_2\Delta_2 + N_3\Delta_3 - N_4\Delta_4 = 0
\end{aligned} \right\}, \quad (5.46b)$$

其中

$$M_1 = M_{11} - R_L R_{in} M_{12},$$

$$M_2 = M_{21} - R_L R_{in} M_{22}$$

$$M_3 = M_{31} - R_L R_{in} M_{32},$$

$$M_4 = M_{41} - R_L R_{in} M_{42},$$

$$M_{11} = [k_{p1} R_{res} J_0(k_{p1} R_{res}) - (1 - \nu) J_1(k_{p1} R_{res})] \\ \times \left[\cos k_1 l_1 + \frac{\omega X_L \sin k_1 l_1}{\pi(r_1^2 - r_0^2) E k_1} \right],$$

$$M_{12} = \frac{\omega^2 (1 - \nu^2) J_1(k_{p1} R_{res}) \sin k_1 l_1}{2\pi^2 \cdot E^2 \cdot B k_1 (r_1^2 - r_0^2)},$$

$$M_{21} = -[k_{p1} R_{res} J_0(k_{p1} R_{res}) - (1 - \nu) J_1(k_{p1} R_{res})] \\ \times \left[\sin k_1 l_1 - \frac{\omega X_L \cos k_1 l_1}{\pi(r_1^2 - r_0^2) E k_1} \right],$$

$$M_{22} = \frac{\omega^2 (1 - \nu^2) J_1(k_{p1} R_{res}) \cos k_1 l_1}{2\pi^2 E^2 \cdot B k_1 (r_1^2 - r_0^2)},$$

$$M_{31} = [k_{p1} R_{res} Y_0(k_{p1} R_{res}) - (1 - \nu) Y_1(k_{p1} R_{res})] \\ \times \left[\cos k_1 l_1 + \frac{\omega X_L \sin k_1 l_1}{\pi(r_1^2 - r_0^2) E k_1} \right],$$

$$M_{32} = \frac{\omega^2 (1 - \nu^2) Y_1(k_{p1} R_{res}) \sin k_1 l_1}{2\pi^2 E^2 \cdot B k_1 (r_1^2 - r_0^2)},$$

$$M_{41} = -[k_{p1} \cdot R_{res} Y_0(k_{p1} R_{res}) \\ - (1 - \nu) Y_1(k_{p1} R_{res})] \\ \times \left[\sin k_1 l_1 - \frac{\omega X_L \cos k_1 l_1}{E k_1 \pi (r_1^2 - r_0^2)} \right];$$

$$N_1 = [k_{p1} R_{res} J_0(k_{p1} R_{res}) - (1 - \nu) J_1(k_{p1} R_{res})] \\ \times \frac{\omega R_L \sin k_1 l_1}{E k_1 \pi (r_1^2 - r_0^2)} - \left[\cos k_1 l_1 + \frac{\omega X_L \sin k_1 l_1}{E k_1 \pi (r_1^2 - r_0^2)} \right] \\ \times \frac{\omega (1 - \nu^2)}{2\pi E B} R_{in} J_1(k_{p1} R_{res}),$$

$$N_2 = -[k_{p1} R_{res} J_0(k_{p1} R_{res}) - (1 - \nu) J_1(k_{p1} R_{res})] \\ \times \frac{\omega R_L \cos k_1 l_1}{E k_1 \pi (r_1^2 - r_0^2)} + \left[\sin k_1 l_1 - \frac{\omega X_L \cos k_1 l_1}{E k_1 \pi (r_1^2 - r_0^2)} \right] \\ \times \frac{\omega (1 - \nu^2)}{2\pi E \cdot B} R_{in} J_1(k_{p1} R_{res}),$$

$$\begin{aligned}
N_3 &= - [k_{p1} R_{res} J_0(k_{p1} R_{res}) - (1 - \nu) J_1(k_{p1} R_{res})] \\
&\quad - \frac{\omega R_L \sin k_1 l_1}{E k_1 \pi (r_1^2 - r_0^2)}, \\
N_4 &= - [k_{p1} \cdot R_{res} \cdot J_0(k_{p1} R_{res}) - (1 - \nu) J_1(k_{p1} R_{res})] \\
&\quad - \frac{\omega R_L \cos k_1 l_1}{E k_1 \pi (r_1^2 - r_0^2)} - \left[\sin k_1 l_1 - \frac{\omega X_L \cos k_1 l_1}{E k_1 \pi (r_1^2 - r_0^2)} \right] \\
&\quad - \frac{\omega (1 - \nu^2)}{2\pi E B} R_{in} J_1(k_{p1} \cdot R_{res}).
\end{aligned} \tag{5.47}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{26} & 0 & 0 & 0 \\ A_{32} & A_{33} & A_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{43} & A_{44} & A_{45} & A_{46} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{55} & A_{56} & A_{58} & 0 & 0 \\ 0 & A_{63} & A_{64} & A_{65} & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{75} & A_{76} & 0 & 0 & A_{7-10} \\ 0 & A_{83} & A_{84} & A_{85} & A_{86} & 0 & A_{89} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{99} & A_{9-10} \end{vmatrix}, \\
\Delta_2 &= \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{26} & 0 & 0 & 0 \\ A_{32} & A_{33} & A_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{43} & A_{44} & A_{45} & A_{46} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{55} & A_{56} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{63} & A_{64} & A_{65} & A_{66} & A_{67} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{75} & A_{76} & 0 & 0 & A_{7-10} \\ 0 & A_{83} & A_{84} & A_{85} & A_{86} & 0 & A_{89} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{99} & A_{9-10} \end{vmatrix}, \\
&\begin{vmatrix} A_{21} & A_{13} & A_{24} & A_{25} & A_{26} & 0 & 0 & 0 \\ A_{31} & A_{33} & A_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{43} & A_{44} & A_{45} & A_{46} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & A_{55} & A_{56} & A_{58} & 0 & 0 \\ 0 & A_{63} & A_{64} & A_{65} & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{75} & A_{76} & 0 & 0 & A_{7-10} \\ 0 & A_{83} & A_{84} & A_{85} & A_{86} & 0 & A_{89} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{99} & A_{9-10} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{26} & 0 & 0 & 0 \\ A_{31} & A_{33} & A_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{43} & A_{44} & A_{45} & A_{46} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{55} & A_{56} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{63} & A_{64} & A_{65} & A_{66} & A_{67} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{75} & A_{76} & 0 & 0 & A_{7-10} \\ 0 & A_{83} & A_{84} & A_{85} & A_{86} & 0 & A_{89} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{99} & A_{9-10} \end{vmatrix}.$$

$$A_{22} = \frac{k_{p1}}{1-\nu^2} Y_0(k_{p1}r_1) - \frac{Y_1(k_{p1}r_1)}{r_1(1-\nu)},$$

$$A_{21} = \frac{k_{p1}}{1-\nu^2} J_0(k_{p1}r_1) - \frac{1}{r_1(1+\nu)} J_1(k_{p1}r_1),$$

$$A_{23} = - \left[\frac{k_p(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} J_0(k_p r_1) - \frac{J_1(k_p r_1)}{(1+\nu)r_1} \right],$$

$$A_{24} = - \left[\frac{k_p(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} Y_0(k_p r_1) - \frac{Y_1(k_p r_1)}{(1+\nu)r_1} \right],$$

$$A_{25} = - \frac{2\nu \sin\left(k \frac{B}{2}\right)}{(1+\nu)(1-2\nu)B},$$

$$A_{26} = - \frac{2\nu \left[\cos\left(k \frac{B}{2} - 1\right) \right]}{(1+\nu)(1-2\nu)B},$$

$$A_{31} = J_1(k_p r_1), \quad A_{32} = Y_1(k_p r_1),$$

$$A_{33} = -J_1(k_p r_1), \quad A_{34} = -Y_1(k_p r_1),$$

$$A_{44} = \frac{k_p(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} Y_0(k_p r_0) - \frac{Y_1(k_p r_0)}{(1+\nu)r_0},$$

$$A_{43} = \frac{k_p(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} J_0(k_p r_0) - \frac{J_1(k_p r_0)}{(1+\nu)r_0},$$

$$A_{45} = \frac{2\nu \sin \frac{B}{2}}{(1+\nu)(1-2\nu)B},$$

$$A_{46} = \frac{2\nu \left[\cos\left(k \frac{B}{2}\right) - 1 \right]}{(1+\nu)(1-2\nu)B},$$

$$A_{55} = \sin\left(k \frac{B}{2}\right), \quad A_{56} = \cos\left(k \frac{B}{2}\right), \quad A_{58} = -1,$$

$$A_{63} = \frac{2\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)(r_1^2 - r_0^2)} \cdot [r_1 J_1(k_p r_1) - r_0 J_1(k_p r_0)],$$

$$A_{64} = \frac{2\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)(r_1^2 - r_0^2)} \cdot [r_1 Y_1(k_p r_1) - r_0 Y_1(k_p r_0)],$$

$$A_{65} = \frac{(1-\nu)k_1 \cos\left(k \frac{B}{2}\right)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad A_{66} = \frac{(1-\nu)k \sin\left(\frac{B}{2}\right)}{(1+\nu)(1-2\nu)},$$

$$A_{67} = -k_1, \quad A_{75} = -\sin\left(k \frac{B}{2}\right), \quad A_{76} = \cos\left(k \frac{B}{2}\right),$$

$$A_{7-10} = -1,$$

$$A_{83} = \frac{2\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)(r_1^2 - r_0^2)} \cdot [r_1 J_1(k_p r_1) - r_0 J_1(k_p r_0)],$$

$$A_{84} = A_{64}, \quad A_{85} = A_{65}, \quad A_{86} = A_{66},$$

$$A_{89} = k_1, \quad A_{99} = \cos k_1 l_1, \quad A_{9-10} = \sin k_1 l_1,$$

将式(5.47)中的 M_1 , M_2 , M_3 和 M_4 代入式(5.46a)中的

第一方程, 可以得到共振状态振动方向变换器的输入阻抗 R_{in} ,

$$R_{in} = \frac{-M_{11}\Delta_1 + M_{21}\Delta_2 + M_{31}\Delta_3 - M_{41}\Delta_4}{R_L(-M_{12}\Delta_1 + M_{22}\Delta_2 + M_{32}\Delta_3 - M_{42}\Delta_4)} \quad (5.48)$$

式 (5.46b) 的第二式用来确定共振频率. 利用计算机在给定 r_0, r_1, l_1 时计算频率 f , 输入机械阻 R_{in} 与负载的关系. 计算结果在图 5.16 给出.

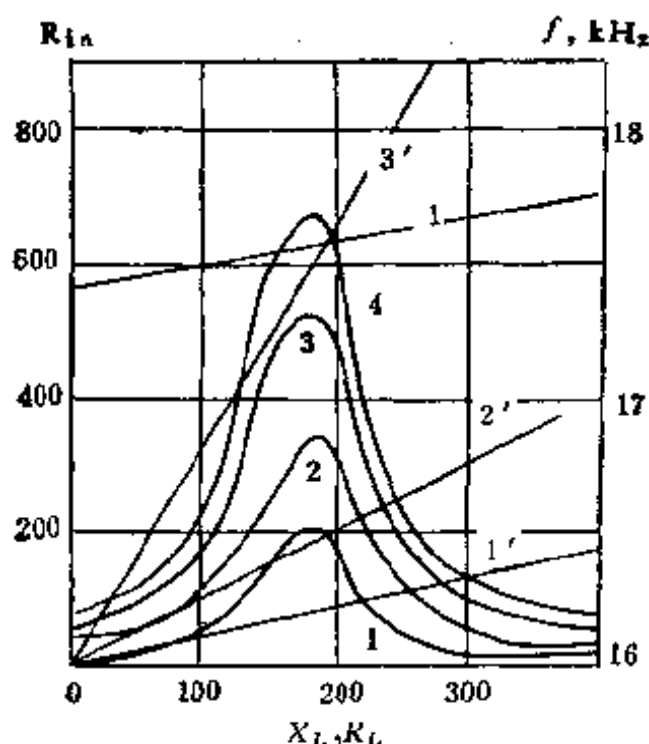


图 5.16 输入机械阻 R_{in} 与负载阻抗 Z_L 的关系

图中 1, 2, 3, 4 表示在 R_L 为常数时 R_{in} 与 X_L 的关系曲线; 1', 2', 3' 表示 X_L 为常数时 R_{in} 与 R_L 的关系曲线; I 为共振频率 f 与负载的关系. 图 5.16 中的数码 1 表示 $R_L = 50$, 2 表示 $R_L = 100$, 3 表示 $R_L = 150$, 4 表示 $R_L = 400$; 1' 表示 $X_L = 0$, 2' 表示 $X_L = 100$, 3' 表示 $X_L = 200$.

由图 5.16 可见, 负载力阻抗对共振频率影响很小, 因此设计系统的共振频率时可以用空载条件下所确定的频率方程计算.

为验证理论计算，做一用于冷拔钢管的 $R-L$ 振动变换系统，其几何尺寸取 $B = 90\text{mm}$, $r_1 = 50\text{mm}$, $r_0 = 15\text{mm}$, $l_1 = 90\text{mm}$, $R_{res} = 86\text{mm}$ ，此时频率为 17850Hz 。在大功率推动下(用三个标准的换能器推动)测量振动系统的共振频率 f ，位移振幅 ξ 与负载的关系(负载大小以变形量 ε 表示)。测量结果如图 5.17 所示。图中 1 表示不加超声振动时的冷拔应力 P ；2 表示加超声振动时的冷拔应力。3 表示模具的振动振

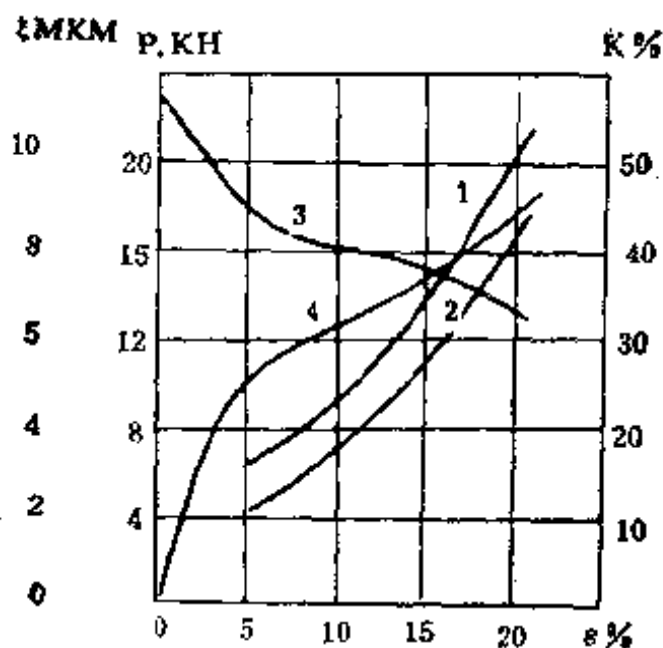


图 5.17 共振频率、位移振幅随负载变化的测量结果

幅 ξ ；4 表示振幅下降系数 K 。

由图 5.17 可见，开始时(变形程度由 0—5%)振幅下降较快，随后下降比较缓慢。加上超声振动后，应力下降。

第四章 有负载的变幅杆

§4.1 引言

前面所讨论的变幅杆特性都是在空载（即变幅杆端面自由时）情况下进行的。在实际应用中，变幅杆的输出端面都是有负载的。例如在超声乳化、粉碎、提取和超声搪锡等应用中，负载是液体或者是液体和固体颗粒的混合液；而在超声焊接，超声金属成型和超声疲劳试验等应用中，负载则是固体介质。在超声加工设备中，变幅杆的负载则随加工工具的不同，磨料液浓度及加工时所加静压力不同而异，负载性质相当复杂。

变幅杆的负载不但在处理对象不同时不一样，而且在处理过程中还在一定范围内变动。例如超声加工过程中，加工工具不断地被磨损；在超声塑料焊接过程中，从焊接工具与焊件接触到熔化时，声负载都在不断地变化。

超声变幅杆的负载是指被处理对象介质在变幅杆输出端面所呈现的机械阻抗。普遍的情况是既有力阻分量也有力抗分量。本章先讨论一些单一变幅杆在只有力抗或力阻负载时的特性，然后简要介绍具有任意负载力阻抗时的变幅杆理论。

§4.2 负载力抗对变幅杆共振频率的影响

4.2.1 指数形变幅杆

由式(2.4)及边界条件

$$\left. \frac{\partial \xi}{\partial x} \right|_{x=0} = 0,$$

得

$$A = -B \frac{k'}{\beta}. \quad (4.1)$$

由边界条件 $F_2 = -S_2 E \left. \frac{\partial \xi}{\partial x} \right|_{x=l}$, 并注意到

$$F_2 = -\omega X_L \xi_2,$$

和式 (2.3), (2.4) 得

$$\operatorname{tg} k'l = \frac{\frac{X_L}{Z_0} \cdot \frac{k'}{\beta}}{\frac{X_L}{Z_0} - \frac{k}{\beta}},$$

或

$$\operatorname{tg} k'l = \frac{k'l}{\beta l - \frac{Z_0}{\lambda_L} k'l}, \quad (4.2)$$

其中 X_L 为负载力抗.

$Z_0 = S_2 \rho C$, ρC 为变幅杆的特性力阻抗, 由式 (4.2) 可见

1. 当负载力抗 $X_L = 0$ 时, 由上式得

$$k'l = \pi \quad (\text{基频}),$$

与式 (2.6) 结果相同, 即为两端自由时的共振条件.

2. 当 $X_L \rightarrow \infty$ 时式 (4.2) 简化为

$$\operatorname{tg} k'l = \frac{k'}{\beta},$$

与式 (2.25) 的结果相同. 实际上 $X_L = \infty$ 时相当于输出端的位移等于零, 即窄端为节点的四分之一波长指数杆.

3. 当 X_L 可以用等效质量表示时, 即 $X_L = \omega M$, M 为等效质量, 上式简化为

$$\operatorname{tg} k'l = \frac{k'l}{\beta l - \frac{S_2 \rho C}{\omega M} k'l} = \frac{k'l}{\beta l - \frac{S_2 \rho l}{M}} \quad (4.3)$$

4.2.2 圆锥形变幅杆

由式 (2.45) 及边界条件 $\left. \frac{\partial \xi}{\partial x} \right|_{x=0} = 0$,

得

$$A_2 = -B_2 \frac{k}{\alpha} \quad (4.4)$$

由边界条件

$$F_2 = -S_2 E \left. \frac{\partial \xi}{\partial x} \right|_{x=l},$$

考虑式 (2.44), (2.45) 及 $F_2 = -\omega X_L \xi_2$, 得

$$\operatorname{tg} k'l = \frac{\frac{k}{\alpha} \cdot \frac{X_L}{Z_{02}} + \frac{\alpha l}{\alpha l - 1}}{\frac{X_L}{Z_{02}} - \frac{\alpha}{k} \left(\frac{k^2}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha l - 1} \right)} \quad (4.5)$$

或

$$\operatorname{tg} k'l = \frac{\frac{k}{\alpha} + \frac{\alpha l}{\alpha l - 1} \cdot \frac{Z_{02}}{X_L}}{1 - \frac{\alpha}{k} \left(\frac{k^2}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha l - 1} \right) \frac{Z_{02}}{X_L}} \quad (4.6)$$

由 (4.5) 式可见,

1. 当 $X_L = 0$ 时

$$\operatorname{tg} k'l = \frac{k'l}{1 - \left(\frac{k}{\alpha} \right)^2 (\alpha - 1)}$$

与式 (2.46a) 的结果一样。

2. 当 $X_L \rightarrow \infty$ 时

$$\operatorname{tg} kl = \frac{k}{\alpha}, \quad \frac{\operatorname{tg} kl}{kl} = \frac{D_1}{D_1 - D_2},$$

与窄端为节点的四分之一波长圆锥体的结果一致。

3. 当 $X_L = \omega M$ 时

有

$$\operatorname{tg} kl = \frac{\frac{k}{\alpha} \cdot \frac{\omega M}{Z_{02}} + \frac{\alpha l}{\alpha l - 1}}{\frac{\omega M}{Z_{02}} - \frac{\alpha}{k} \left(\frac{k^2}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha l - 1} \right)}. \quad (4.7)$$

4.2.3 悬链线形变幅杆

由式 (2.27) 及边界条件 $\left. \frac{\partial \xi}{\partial x} \right|_{x=0} = 0$, 得

$$A_1 = -B_1 \frac{k'_0}{\gamma} \operatorname{cth} \gamma l. \quad (4.8)$$

由边界条件

$$F_2 = -S_2 E \left. \frac{\partial \xi}{\partial x} \right|_{x=l},$$

利用式 (2.26), (2.27) 及 $F_2 = -\omega X_L \xi_2$, 得

$$\operatorname{tg} k'_0 l = \frac{\frac{k}{\gamma} \cdot \frac{X_L}{Z_{02}} \operatorname{cth} \gamma l + 1}{\frac{k}{k'_0} \cdot \frac{X_L}{Z_{02}} - \frac{k'_0}{\gamma} \operatorname{cth} \gamma l}, \quad (4.9a)$$

或

$$\operatorname{tg} k'_0 l = \frac{\frac{k}{\gamma} \operatorname{cth} \gamma l + \frac{Z_{02}}{X_L}}{\frac{k}{k'_0} - \frac{k'_0}{\gamma} \frac{Z_{02}}{X_L} \operatorname{cth} \gamma l}. \quad (4.9b)$$

由上式可见,

1. 当 $X_L = 0$ 时

$$\operatorname{tg} k_0 l = -\frac{\gamma}{k_0} \operatorname{th} \gamma l,$$

与式 (2.28a) 结果相同.

2. 当 $X_L \rightarrow \infty$ 时

$$\operatorname{tg} k_0 l = \frac{k_0}{\gamma} \operatorname{cth} \gamma l,$$

与窄端为节点的四分之一波长悬链线杆的频率公式 (2.43) 相同.

3. 当 $X_L = \omega M$ 时

$$\operatorname{tg} k_0 l = \frac{\frac{k}{\gamma} \cdot \frac{\omega M}{S_2 \rho C} + \operatorname{th} \gamma l}{\frac{k}{k_0} \frac{\omega M}{S_2 \rho C} \operatorname{th} \gamma l - \frac{k_0}{\gamma}} \quad (4.10a)$$

或

$$\operatorname{tg} k_0 l = \frac{(Gkl / \operatorname{arc} \operatorname{ch} N) + \operatorname{th} \gamma l}{(kl / k_0 l) G \operatorname{th} \gamma l - (k_0 l / \operatorname{arc} \operatorname{ch} N)} \quad (4.10b)$$

其中

$$\operatorname{th} \gamma l = (N^2 - 1)^{\frac{1}{2}} / N,$$

$$G = (\omega M / S_2 \rho C),$$

$$kl = [(k_0 l)^2 + (\operatorname{arc} \operatorname{ch} N)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

4.2.4 简单形状加工工具的等效质量

在超声加工应用中, 需要用不同形状的工具连接到变幅杆的末端来对材料或零件进行加工. 如果工具是一均匀截面的棒或管, 其横向尺寸小于十分之一波长; 而长度小于四分之一波长, 而且不计及损耗时, 它对变幅杆的影响相当于是质量抗性负载. 其等效质量可用下面所讨论的方法来计算.

类似于电传输线,一均匀无损耗的细棒,终端自由时的输入阻抗 Z 为

$$Z = j\rho_t S_t C_t \operatorname{tg} k_t l_t,$$

如果 $k_t l_t < \frac{\pi}{2}$, 即 $l_t < \frac{\lambda_t}{4}$, 则 Z 为正值, 可用一等效质量 M_t 表示, 此时

$$j\omega M_t = jS_t \rho_t C_t \operatorname{tg} k_t l_t,$$

即

$$M_t = \frac{\operatorname{tg}(k_t l_t)}{k_t l_t} m_t. \quad (4.11)$$

其中 $m_t = S_t \rho_t l_t$ 是工具的质量。 S_t , ρ_t , l_t 分别为工具的截面积, 材料密度和工具的长度。 $k_t = \omega/C_t$, C_t 是工具材料中的纵波速度。

其他形状的工具可以根据前面分析变幅杆的方法来计算其阻抗。

§ 4.3 负载为力阻时变幅杆的特性^[33]

前面我们讨论了纯力抗负载对变幅杆共振频率的影响, 这一节将讨论另一种情况, 即负载为纯力阻时变幅杆的放大

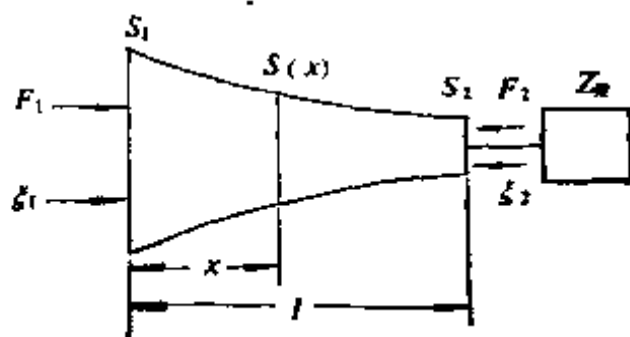


图 4.1 负载为力阻的变幅杆

系数 M_L 及输入阻抗 Z_i 。

如图 4.1, 在变幅杆的输出端接有一纯力阻负载 Z_R 。在讨论时仍然设杆作一维纵振动, 且没有损耗。基于谐和振动时变截面杆波动方程 (2.2), 可以得到变截面杆的放大系数 M_L , 输入阻抗 Z_i 及输入阻抗的虚部与实部之比 G_i ($G_i = \text{Im}(Z_i)/\text{Re}(Z_i)$) 的一般表达式^[23]

$$M_L = \frac{(1 + Y^2)^{1/2}}{[(1 - \tau_2 Y^2 + (Y/P_2)^2)^{1/2}]^{1/2}} \cdot \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^{1/2} \quad (4.12a)$$

$$Z_i = \frac{\frac{Z_{01}}{P_2} \left(\frac{k_1}{k}\right) (1 + Y^2)}{(1 - \tau_2 Y)^2 + (Y/P_2)^2} + j \frac{Z_{01}(k_1/k) \left\{ [(1 + \tau_1 \tau_2) Y - (\tau_1 - \tau_2)](1 - \tau_2 Y) - (1 + \tau_1 Y) \frac{Y}{P_2^2} \right\}}{(1 - \tau_2 Y)^2 + (Y/P_2)^2} \quad (4.12b)$$

$$G_i = \frac{1}{P_2} \times \frac{[(1 + \tau_1 \tau_2) Y - (\tau_1 - \tau_2)](1 - \tau_2 Y) P_2^2 - (1 + \tau_1 Y) Y}{(1 + Y^2)} \quad (4.13)$$

其中

$$Y = \lg k_1 l, \quad N = (S_1/S_2)^{1/2}, \quad P_2 = (k_1/k)(Z_{02}/Z_R),$$

$$Z_{01} = S_1 \rho C, \quad Z_{02} = S_2 \rho C,$$

$$\tau_1 = \frac{1}{k_1} \cdot \frac{1}{2S_1} \left(\frac{\partial S_1}{\partial x} \right), \quad \tau_2 = \frac{1}{k_1} \cdot \frac{1}{2S_2} \left(\frac{\partial S_2}{\partial x} \right).$$

三种变幅杆的 τ 值列于表 4.1。

表 4.1 三种变幅杆的 τ 值

变幅杆	τ	τ_1	τ_2
指数形		$-\beta/k'$	$-\beta/k'$
悬链线形		$-(\gamma/k_0')\text{th } \gamma l$	0
圆锥形		$-\alpha/k$	$-\alpha/k(1 - \alpha l)$

4.3.1 有负载力阻时半波长的变幅杆

这里半波长的条件是指无负载且输入阻抗为零的情况，即

$$Y = (\tau_1 - \tau_2)/(1 + \tau_1\tau_2). \quad (4.14)$$

由式 (4.12a) — (4.13) 可以得到单一指数形、悬链线形及圆锥

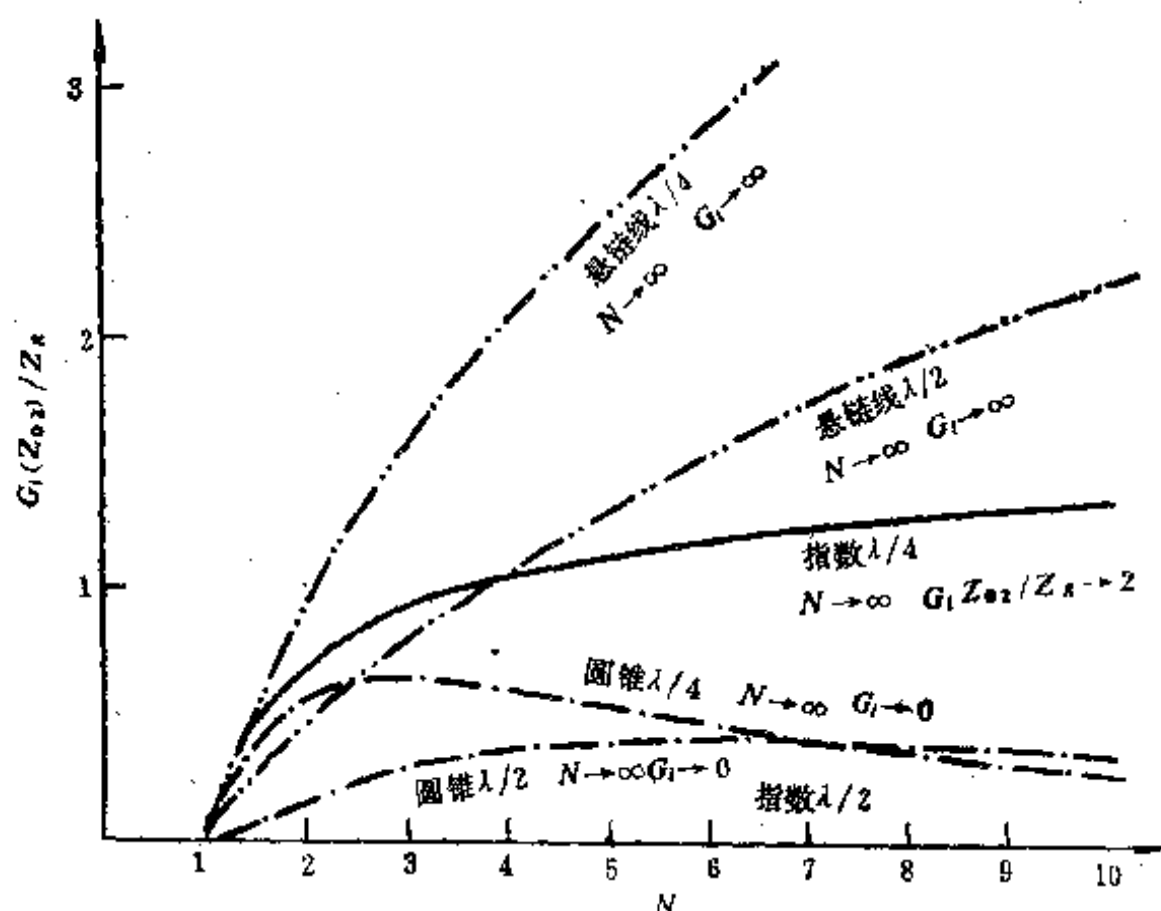


图 4.2 负载为力阻时三种变幅杆的 G_1 与面积系数 N 的关系

表 4.2 负载为力阻时三种变幅杆的参数

参量 变幅杆	M_L	Z_L/Z_R	G_i
指数形	N	N^2	0
总链线形	$N \cdot \frac{1}{[\cos^2 k_0' l + \sin^2 k_0' l / P_1^2]^{1/2}}$	$N^2 \frac{1 + \operatorname{tg}^2 k_0' l}{(1 + \operatorname{tg}^2 k_0' l / P_1^2)} \left(1 - j \frac{\operatorname{tg} k_0' l}{P_1}\right)$	$\operatorname{tg} k_0' l / P_1$
圆锥形	$N \cdot \frac{\left(1 + \frac{\alpha^2}{k^2}\right)^{1/2} \left(1 + N^2 \frac{\alpha^2}{k^2}\right)^{1/2}}{\left[\left(1 + N^2 \frac{\alpha^2}{k^2}\right)^2 + \alpha^2 (N-1)^2 / P_1^2 k^2\right]^{1/2}}$	$N^2 \frac{\left(1 + \frac{\alpha^2}{k^2}\right) \left[\left(1 + \frac{N^2 \alpha^2}{k^2}\right) + j \frac{\alpha(N-1)}{k P_1}\right]}{\left[\left(1 + \frac{N^2 \alpha^2}{k^2}\right)^2 + \frac{\alpha^2 (N-1)^2}{k^2 P_1^2}\right]}$	$\frac{\alpha(N-1)}{k P_1} \cdot \frac{1}{\left(1 + N^2 \frac{\alpha^2}{k^2}\right)}$

形变幅杆的 M_L , Z_i 及 G_i , 列于表 4.2.

对于半波长变幅杆, 有负载力阻时的放大系数 M_L 与空载时的放大系数 M_P 是不同的. 由式 (4.12a) 及 (4.14) 可得

$$M_L/M_P = 1/(1 + G_i^2)^{1/2}. \quad (4.15)$$

即有负载力阻下放大系数一般比空载小. 但对于指数形变幅杆则空载和纯阻负载时的放大系数相同 ($M_P = M_L$).

图 4.2 给出三种变幅杆的 G_i 随 N 变化的曲线. 由图可见, 对于指数形变幅杆, 有力阻负载时 M_L 不变, 输入为纯阻, 且 $Z_i/Z_R = M^2 = S_1/S_2$; 而对于悬链线形和圆锥形两种变幅杆有负载力阻时放大系数变小, 其程度随 Z_R 而变化, 且 Z_i 有抗的分量. 因此如果以 M_L 作比较, 指数形优于圆锥形, 最差为悬链线形.

4.3.2 有负载力阻时 $1/4$ 波长的变幅杆

四分之一波长的变幅杆是指负载力阻 $Z_R = 0$, 而输入

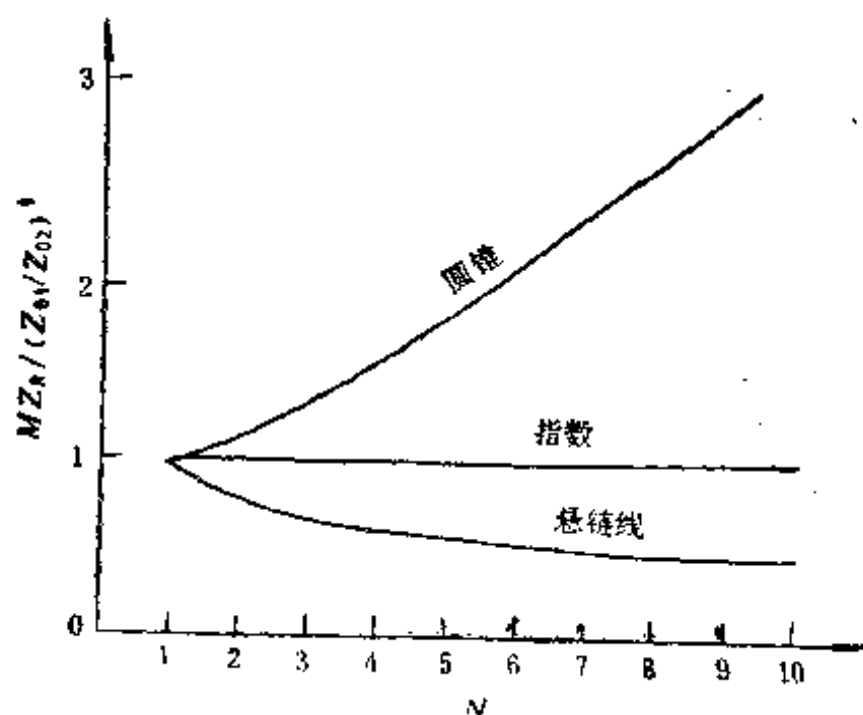


图 4.3 负载为力阻时三种 $1/4$ 波长变幅杆的放大系数 M_L 与面积系数 N 的关系

表 4.3 负载为力阻时三种 1/4 波长变幅杆的参数

参量 类型	$\lg k_1 l = \frac{1}{2}$ 条件	M_L	Z_A/Z_R	G_i
指数形	$\frac{\lg k_1 l}{k_1 l} = \ln N$	$N \frac{Z_{02}}{Z_R}$	$\frac{Z_{01} Z_{02}}{Z_R^2} \left(1 + j \frac{2 Z_R \beta}{Z_{02} k} \right)$	$2 \frac{Z_R}{Z_{01}} \cdot \frac{\beta}{k}$
悬链线形	$k_1 l = \frac{\pi}{2}$	$N \frac{Z_{02}}{Z_R} \left[1 + \left(\frac{2 \gamma l}{\pi} \right)^2 \right]^{1/2}$	$\frac{Z_{01} Z_{02}}{Z_R^2} \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{2 \gamma l}{\pi} \right)^2} + j \frac{Z_R}{Z_{01}} \cdot \frac{\gamma}{k_0^2} \frac{\operatorname{th} \gamma l}{\left[\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 + (\gamma l)^2 \right]^{1/2}} \right]$	$\frac{Z_R}{Z_{02}} \cdot \frac{2}{\pi} \left[1 + \left(\frac{2 \gamma l}{\pi} \right)^2 \right]^{1/2} (\gamma l) \operatorname{th} \gamma l$
圆锥形	$\frac{k l}{\lg k l} = 1 - N$	$N \frac{Z_{02}}{Z_R} \left[1 + \frac{(N-1)^2}{k l} \right]^{1/2}$	$\frac{Z_{01} Z_{02}}{Z_R^2} \left[\left(1 + \frac{(N-1)^2}{k l} \right) + j \frac{Z_R}{Z_{01}} \cdot \frac{N^2 - 1}{N k l} \right]$	$\frac{Z_R}{Z_{02}} \cdot \frac{N^2 - 1}{N} \cdot \frac{1}{k l + (N-1)^2}$

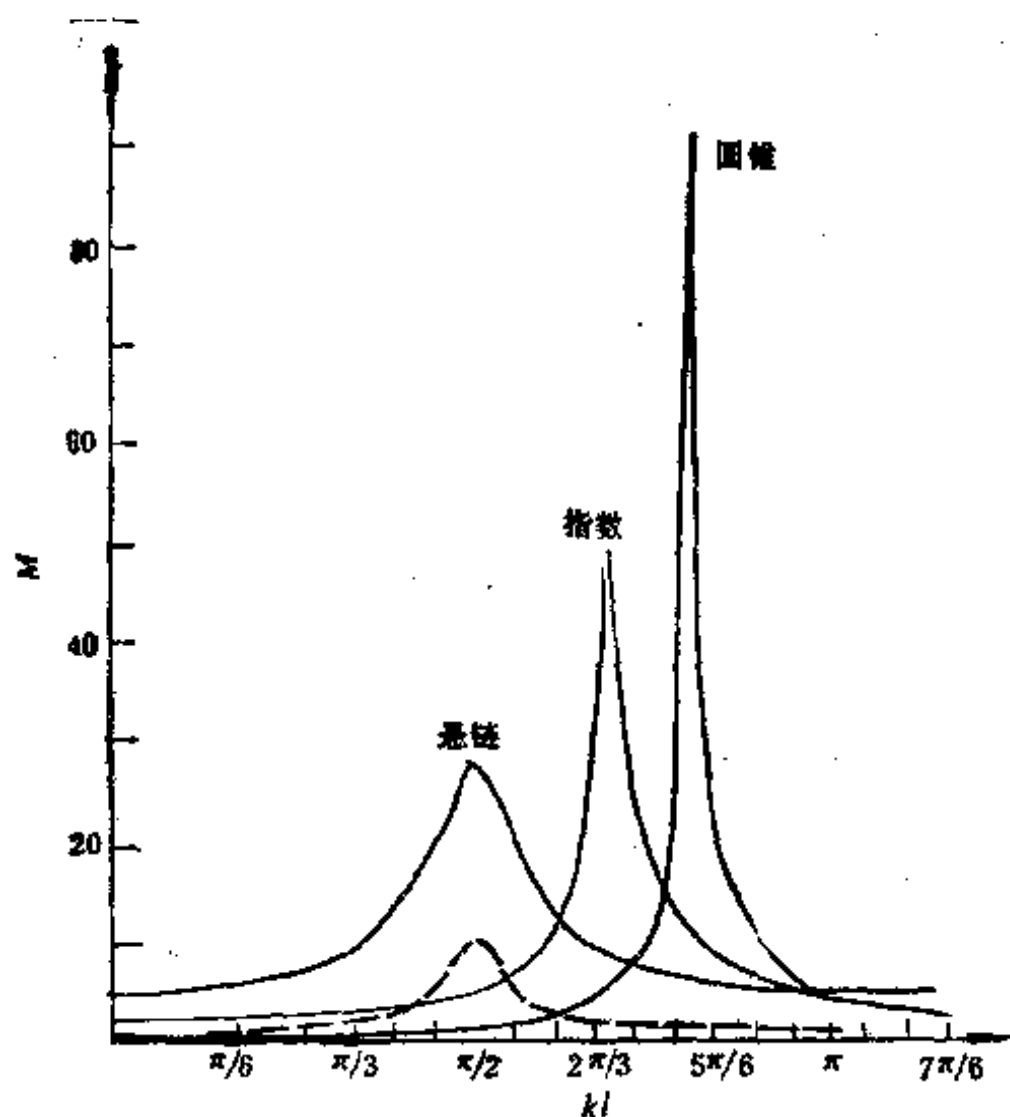


图 4.4 负载为力阻时三种 $1/4$ 波长变幅杆的放大系数 M_L 与 kl 的关系

阻抗 $Z_L = \infty$ 时的情况,此时有

$$Y = 1/\tau_2. \quad (4.16)$$

对于指数形,悬链线形及圆锥形变幅杆在第二章中已经给出过空载时的频率方程,有负载力阻时的参量 Z_L 、 M_L 及 G_L 列于表 4.3. 而 M 随 N 的变化见图 4.3, G_L 随 N 的变化在图 4.2 已给出.

由表 4.3 及图 4.3 可见,对四分之一波长变幅杆,放大系数 M_L 与杆两端材料力阻的几何平均值成正比,而与负载力阻成反比.指数形的放大系数 $M_L = N \cdot Z_{02}/Z_R$, 如果 Z_{02}/Z_R

相当大,例如 10, 则四分之一波长指数杆要比半波长杆的放大系数大 10 倍, 如果 Z_{02}/Z_R 足够大, 即使 $N < 1$ 也有可能得到放大。

为对三种变幅杆的放大系数 M_L 作比较, 图 4.4 给出同一 N 值 ($=5$) 及 Z_{02}/Z_R 值 ($=10$) 时 M_L 随 $k_2 l$ 的变化曲线。由图可见, 在四分之一波长时 (图中标有“*”号), $M_{\text{锥}} > M_{\text{指}} > M_{\text{圆}}$, 且差别较大; 在半波长时 (图中标有“·”) 则 $M_{\text{锥}} < M_{\text{指}} < M_{\text{圆}}$, 而差别较小。

§ 4.4 具有任意负载力阻抗的变幅杆理论^[32]

上面两节我们讨论了具有纯力抗或纯力阻负载时变幅杆的一些特性。本节将进一步讨论更普遍的情况, 即具有任意负载力阻抗的变幅杆理论。讨论时仍然设杆为均匀、各向同性材料的变截面杆, 不计机械损耗。平面纵波沿图 4.5 变截面杆轴向传播的波动方程为式 (2.2)。

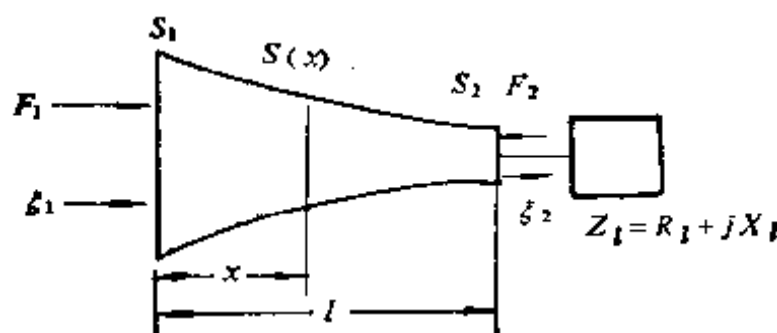


图 4.5 负载为力阻抗的变幅杆

4.4.1 变幅杆的振速、截面力及输入阻抗的一般表达式

考虑 $(F_2/\xi_2) = Z_l = R_l + jX_l$ 时可求得三种变幅杆在有任意负载力阻抗 Z_l 时的质点振动速度表达式为

圆锥形

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\xi}}{\dot{\xi}_1} = & \frac{1}{N - (N-1)\mu} \left\{ \left[\cos \phi + \frac{N-1}{\phi} \sin \phi \right. \right. \\ & \left. \left. + j \frac{Z_l}{Z_2} \sin \phi \right] \cos(\phi\mu) \right. \\ & \left. + \left[\sin \phi - \frac{N-1}{\phi} \cos \phi \right. \right. \\ & \left. \left. - j \frac{Z_l}{Z_2} \cos \phi \right] \sin(\phi\mu) \right\}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

指数形

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\xi}}{\dot{\xi}_2} = & e^{-N_1(1-\mu)} \left\{ \left[\cos \phi_2 + \frac{N_2}{\phi_2} \sin \phi_2 \right. \right. \\ & \left. \left. + j \frac{Z_l}{Z_2} \left(1 + \left(\frac{N_2}{\phi_2} \right)^2 \right)^{1/2} \sin \phi_2 \right] \cos(\phi_2\mu) \right. \\ & \left. + \left[\sin \phi_2 - \frac{N_2}{\phi_2} \cos \phi_2 \right. \right. \\ & \left. \left. - j \frac{Z_l}{Z_2} \left(1 + \left(\frac{N_2}{\phi_2} \right)^2 \right)^{1/2} \cos \phi_2 \right] \sin(\phi_2\mu) \right\}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

悬链线形

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\xi}}{\dot{\xi}_2} = & \frac{1}{\text{ch}(N_3(1-\mu))} \left\{ \left[\cos \phi_3 + j \frac{Z_l}{Z_2} \right. \right. \\ & \left. \left. \times \left(1 + \left(\frac{N_3}{\phi_3} \right)^2 \sin^2 \phi_3 \right)^{1/2} \sin \phi_3 \right] \cos(\phi_3\mu) \right. \\ & \left. + \left[\sin \phi_3 - j \frac{Z_l}{Z_2} \left(1 + \left(\frac{N_3}{\phi_3} \right)^2 \right)^{1/2} \cos \phi_3 \right] \sin(\phi_3\mu) \right\}, \end{aligned} \quad (4.19)$$

其中

$\mu = x/l$, ($0 \leq \mu \leq 1$) 为相对坐标;

$Z_1 = S_1 \rho C$, $Z_2 = S_2 \rho C$ 为变幅杆激振端, 负载端的力阻抗;

$N_2 = \ln N = \beta l$, $N_3 = \text{ch}^{-1} N = \gamma l$ 分别为指数形、悬链线形变幅杆二端面广义线度比;

$\phi = kl$ 为圆锥形变幅杆相长;

$\phi_2 = k_2 l = (\phi^2 - N_2^2)^{1/2}$, $\phi_3 = k_3 l = (\phi^2 - N_3^2)^{1/2}$ 分别为指数形、悬链线形变幅杆广义相长.

无量纲截面力表达式为

圆锥形

$$\begin{aligned} \frac{F}{Z_x \dot{\xi}_2} = & \frac{1}{[\mu(N-1) - N]^2} \left\{ \left[\frac{Z_l}{Z_2} \sin \phi \right. \right. \\ & - j \left(\cos \phi - \frac{1-N}{\phi} \sin \phi \right) \left. \right] \left\{ \frac{1-N}{\phi} \cos(\phi\mu) \right. \\ & + [\mu(1-N) + N] \sin(\phi\mu) \left. \right\} \\ & - \left[\frac{Z_l}{Z_2} \cos \phi + j \left(\sin \phi + \frac{1-N}{\phi} \cos \phi \right) \right] \\ & \times \left\{ \frac{1-N}{\phi} \sin(\phi\mu) - [\mu(1-N) + N] \cos(\phi\mu) \right\} \left. \right\}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

指数形

$$\begin{aligned} \frac{F}{Z_x \dot{\xi}_2} = & e^{N_2(1-\mu)} \left\{ \left[\frac{Z_l}{Z_2} \sin \phi_2 - j \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{N_2}{\phi_2} \right)^2 \right)^{1/2}} \right. \right. \\ & \times \left(\cos \phi_2 + \frac{N_2}{\phi_2} \sin \phi_2 \right) \left. \right] \\ & \times \left[\sin(\phi_2\mu) - \frac{N_2}{\phi_2} \cos(\phi_2\mu) \right] \\ & + \left[\frac{Z_l}{Z_2} \cos \phi_2 + j \frac{1}{\left(1 + (N_2/\phi_2)^2 \right)^{1/2}} \right. \\ & \times \left(\sin \phi_2 - \frac{N_2}{\phi_2} \cos \phi_2 \right) \left. \right] \end{aligned}$$

$$\cdot \left[\cos(\phi_2 \mu) + \frac{N_2}{\phi_2} \sin(\phi_2 \mu) \right] \}. \quad (4.21)$$

悬链线形

$$\begin{aligned} \frac{F}{Z_{rS_2}} = & \frac{1}{\text{ch}(N_3 - N_3 \mu)} \left\{ \left[\frac{Z_l}{Z_2} \sin \phi_3 \right. \right. \\ & \left. \left. - j \frac{1}{(1 + (N_3/\phi_3)^2)^{1/2}} \cos \phi_3 \right] \right. \\ & \cdot \left[\sin(\phi_3 \mu) - \frac{N_3}{\phi_3} \cos(\phi_3 \mu) \text{th}(N_3 - N_3 \mu) \right] \\ & + \left[\frac{Z_l}{Z_2} \cos \phi_3 + j \frac{1}{(1 + (N_3/\phi_3)^2)^{1/2}} \sin \phi_3 \right] \\ & \cdot \left[\cos(\phi_3 \mu) + \frac{N_3}{\phi_3} \sin(\phi_3 \mu) \text{th}(N_3 - N_3 \mu) \right] \}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

相对输入阻抗表达式为

圆锥形

$$\begin{aligned} \frac{Z_i}{Z_1} = & \left\{ \frac{Z_l}{Z_2} \left(\cos \phi - \frac{N-1}{\phi N} \sin \phi \right) \right. \\ & \left. + j \left[\left(1 + \frac{(N-1)^2}{N\phi^2} \right) \sin \phi - \frac{(N-1)^2}{N\phi} \cos \phi \right] \right\} / \\ & \left[\left(\cos \phi + \frac{N-1}{\phi} \sin \phi \right) + j \left(\frac{Z_l}{Z_2} \sin \phi \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.23)$$

指数形

$$\begin{aligned} \frac{Z_i}{Z_1} = & \left\{ \frac{Z_l}{Z_2} \left(\cos \phi_2 - \frac{N_2}{\phi_2} \sin \phi_2 \right) \right. \\ & \left. + j [1 + (N_2/\phi_2)^2]^{1/2} \sin \phi_2 \right\} / \\ & \left[\left(\cos \phi_2 + \frac{N_2}{\phi_2} \sin \phi_2 \right) \right. \\ & \left. + j \frac{Z_l}{Z_2} (1 + (N_2/\phi_2)^2)^{1/2} \sin \phi_2 \right]. \end{aligned} \quad (4.24)$$

悬链线形

$$\frac{Z_i}{Z_1} = \left[\frac{Z_l}{Z_2} \left(\cos \phi_3 - \frac{N_3}{\phi_3} \operatorname{th}(N_3) \sin \phi_3 \right) + j \frac{1}{(1 + (N_3/\phi_3)^2)^{1/2}} \cdot \left(\sin \phi_3 + \frac{N_3}{\phi_3} \operatorname{th}(N_3) \cos \phi_3 \right) \right] / \left[\cos \phi_3 + j \frac{Z_l}{Z_2} (1 + (N_3/\phi_3)^2)^{1/2} \sin \phi_3 \right]. \quad (4.25)$$

4.4.2 有载变幅杆特性的 Möbius 变换分析

如果以 Z 表示相对负载阻抗 (Z_l/Z_2), 以 W 表示相对输入阻抗 (Z_i/Z_1), 则变幅杆两端阻抗关系式 (4.23) — (4.25) 可表为

$$W = \frac{aZ + b}{cZ + d}, \quad (4.26)$$

式中 a, b, c, d 仅与变幅杆的相长和线度比有关。对三种变幅杆, a, d 为实数, b, c 为虚数, 且恒有 $\Delta_1 = ad - bc \approx 0$, ($\Delta_1 \equiv 1$)。当我们以相长、线度比为参数, 把 W 看作是 Z 的复变函数时, 则式 (4.26) 是定义在复平面上双方单值的解析函数, 称为 Möbius 变换。 a, b, c, d 称为变换系数。三种变幅杆的变换系数列于表 4.4。

$c \neq 0$ 时, Möbius 变换 (4.26) 有一个简单极点 ($-d/c$), 一个零点 ($-b/a$), 以及一个为无穷 (∞) 的临界点。除极点和临界点外, Möbius 变换是 Z 平面到 W 平面的一个保形映射。

$c = 0$ 时, (4.26) 式化简为一次有理函数

$$W = \frac{a}{d} Z + \frac{b}{d}, \quad (4.27)$$

表 4.4 变幅杆的变换参数

变幅杆类型	$W = \frac{aZ + b}{cZ + d}, W = Z_1/Z_2, Z = Z_1/Z_2$	$R = [(bc - da)/c^2]^{1/2} = \frac{1}{ c }$ $Q = -d/c = iq, H = -b/a = ih,$ $P = a/c = ip, G = b/d = iq$
圆锥形	$a = \cos\phi - \frac{N-1}{\phi N} \sin\phi$ $b = j \left[\left(1 + \frac{(N-1)^2}{N\phi^2} \right) \sin\phi - \frac{(N-1)^2}{N\phi} \cos\phi \right]$ $c = j \sin\phi$ $d = \cos\phi + \frac{N-1}{\phi} \sin\phi$	$R = 1/ \sin\phi $ $q = \frac{N-1}{\phi} + \operatorname{ctg}\phi$ $h = \left[\frac{(N-1)^2}{N\phi} \operatorname{ctg}\phi - 1 - \frac{(N-1)^2}{N\phi^2} \right] / \left(\operatorname{ctg}\phi - \frac{N-1}{N\phi} \right)$ $p = \frac{N-1}{\phi N} + \operatorname{ctg}\phi$ $g = \left[1 + \frac{(N-1)^2}{N\phi^2} - \frac{(N-1)^2}{N\phi} \operatorname{ctg}\phi \right] / \left(\operatorname{ctg}\phi + \frac{N-1}{\phi} \right)$
指数形	$a = \cos\phi_2 - \frac{N_2}{\phi_2} \sin\phi_2$ $b = j \left[1 + \left(\frac{N_2}{\phi_2} \right)^2 \right]^{1/2} \sin\phi_2$	$R = 1 / \left[\left(1 + \left(\frac{N_2}{\phi_2} \right)^2 \right)^{1/2} \sin\phi_2 \right]$ $q = \left(\frac{N_2}{\phi_2} + \operatorname{ctg}\phi_2 \right) / \left[1 + \left(\frac{N_2}{\phi_2} \right)^2 \right]^{1/2}$

表 4.4(续)

指数形	$c = i \left[1 + \left(\frac{N_2}{\phi_2} \right)^2 \right]^{1/2} \sin \phi_2$ $d = \cos \phi_2 + \frac{N_2 \sin \phi_2}{\phi_2}$	$h = \left[1 + \frac{N_2}{\phi_2} \right]^{1/2} / \left(\frac{N_2}{\phi_2} - \operatorname{ctg} \phi_2 \right)$ $p = \left(\frac{N_2}{\phi_2} - \operatorname{ctg} \phi_2 \right) / \left[1 + \left(\frac{N_2}{\phi_2} \right)^2 \right]^{1/2}$ $g = \left[1 + \left(\frac{N_2}{\phi_2} \right)^2 \right]^{1/2} / \left(\frac{N_2}{\phi_2} + \operatorname{ctg} \phi_2 \right)$
悬链线形	$a = \cos \phi_3 - \frac{N_3}{\phi_3} \operatorname{th} N_3 \sin \phi_3$ $b = i \left[1 + \left(\frac{N_3}{\phi_3} \right)^2 \right]^{-1/2} \times \left(\sin \phi_3 + \frac{N_3}{\phi_3} \cdot \operatorname{th} N_3 \cos \phi_3 \right)$ $c = i \left[1 + \left(\frac{N_3}{\phi_3} \right)^2 \right]^{1/2} \sin \phi_3$ $d = \cos \phi_3$	$R = 1 / \left[\left(1 + \left(\frac{N_3}{\phi_3} \right)^2 \right)^{1/2} \sin \phi_3 \right]$ $q = \operatorname{ctg} \phi_3 / \left[1 + \frac{N_3}{\phi_3} \right]^{1/2}$ $h = \left(1 + \frac{N_3}{\phi_3} \operatorname{th} N_3 \operatorname{ctg} \phi_3 \right) / \left[\left(\frac{N_3}{\phi_3} \operatorname{th} N_3 - \operatorname{ctg} \phi_3 \right) \cdot \left(1 + \left(\frac{N_3}{\phi_3} \right)^2 \right)^{1/2} \right]$ $p = \left(\frac{N_3}{\phi_3} \operatorname{th} N_3 - \operatorname{ctg} \phi_3 \right) / \left[1 + \left(\frac{N_3}{\phi_3} \right)^2 \right]^{1/2}$ $g = \left(\operatorname{tg} \phi_3 + \frac{N_3}{\phi_3} \operatorname{th} N_3 \right) / \left[1 + \left(\frac{N_3}{\phi_3} \right)^2 \right]^{1/2}$

这是一个由 Z 平面到 W 全平面的保形映象。

Möbius 变换 (4.26) 有反变换

$$Z = \frac{-dW + b}{cW - a}. \quad (4.28)$$

反变换 (4.28) 具有类似于正变换 (4.26) 的一些性质。

1. 变幅杆的阻抗映象图 Möbius 变换 (4.26) 将 Z 平面上负载阻抗 (Z_1/Z_2) 点, 变换为 W 平面上输入阻抗 (Z_i/Z_1) 点, 两平面上的点构成一一对应的映象关系。因此, 我们称 W 平面为 Z 平面的映象平面; 称变幅杆输入阻抗 (Z_i/Z_1) 为负载阻抗 (Z_1/Z_2) 的 Möbius 映象。

$c \neq 0$ 时式 (4.26) 可以写为

$$W = P + \frac{R^2}{Z - Q}, \quad (4.29)$$

式中

$$R = [(bc - ad)/c^2]^{1/2} = 1/|c|,$$

$$P = a/c = jp, \quad Q = -d/c = jq,$$

R 为正实数, p, q 为实数。

式 (4.29) 表明: 对 Z 平面上任一负载点 (Z_1/Z_2), 经过一个关于反演 Γ_2 (Q 为圆心, R 为半径) 的反演变换, 一个对实轴的对称变换, 再加上一个沿虚轴的平移变换, 即可求得相应于该负载的变幅杆输入阻抗 (Z_i/Z_1)。

根据 Möbius 变换式, 图 4.6 中以下各点成对应的映象关系: $Q(0, -d/c) \leftrightarrow (\infty)$, $H(0, -b/a) \leftrightarrow (0, 0)$, $(\infty) \leftrightarrow p(0, a/c)$, $(0, 0) \leftrightarrow G(0, b/d)$ 。前一个是 Z 平面上的点, 后一点在 W 平面上。点 p 相当于变幅杆终端夹死时的输入阻抗, 称它为无穷负载象点; 点 G 则为空载时输入阻抗, 称为零负载象点。

Möbius 变换将 Z 平面的直线或圆, 变换为 W 平面上的圆



或直线。它将过 Q 点两正交直线 $R_1/Z_2 = 0$, $x_1/Z_2 = q$, 变换为 W 平面上过 p 点两正交直线 $R_1/Z_1 = 0$, $x_1/Z_1 = p$; 把不经过 Q 点的 Z 平面上等阻负载线 $R_1/Z_2 = c_r$ ($c_r \neq 0$), 变换为在 p 点和虚轴相切的, 直径为 $d_r = R^2/|c_r|$ 的圆。此圆称为等阻映象圆, $c_r > 0$ 时在 W 右半平面, $c_r < 0$ 时在左半平面。不经过 Q 点的平行于实轴的等抗负载线 $x_1/Z_2 = c_x$, 经 Möbius 变换, 变换为在 P 点和 $x_1/Z_1 = p$ 直线相切的等抗映象圆。等抗映象圆对虚轴对称, 直径为 $d_x = R^2/|c_x - q|$ 。 $c_x > q$ 的等抗映象圆位于 $x_1/Z_1 = p$ 直线的下方; 如果 $c_x < q$ 则位于直线的上方。

当 c_r , c_x 按一定步长取值时, 可得图 4.6 所示的变幅杆的阻抗映象图。在一般情况下, $R_1 \geq 0$, 变幅杆输入阻分量 $R_1 \geq 0$, 故此时只需考虑用实线绘制的, 包括虚轴在内的, Z 右半平面到 W 右半平面的变换映象问题。

当变幅杆相长 (ϕ, ϕ_2, ϕ_3) 为 π 的整数倍, 即当 $c = 0$ 时, 变幅杆两端阻抗关系式或为恒等变换(指数形)或为沿虚轴方向平移变换(圆锥形和悬链线形), 相应的阻抗映象图为正交直线族。

圆锥形、指数形和悬链线形变幅杆的映象参数 R, Q, H, P, G 等与相长 (ϕ, ϕ_2, ϕ_3) 和线度比 (N, N_2, N_3) 的关系也列于表 4.4。由表所列关系式, 对任一给定相长、线度比的变幅杆, 我们均可做出其阻抗映象图。根据变换函数的解析性(单值、可导), 如果我们把映象圆看作是一曲线坐标系(以等阻映象圆为等阻负载线, 以等抗映象圆为等抗负载线), 则 W 平面上每一点都有两个坐标值: 直角坐标值是变幅杆输入阻抗 (Z_1/Z_2), 曲线坐标值则为负载阻抗 (Z_1/Z_2)。这样, 变幅杆两端的比较复杂的阻抗对应关系, 可以在一个平面上直观地表示出来。当在实际应用中负载阻抗发生变化时,

(Z_1/Z_2) 在曲线坐标系中变化轨迹, 即为变幅杆的相应输入阻抗 (Z_1/Z_1) 在直角坐标系中的变化曲线, 这对于分析负载变化对输入阻抗的影响是很方便的, 也可以根据这些变化关系, 依特定要求来设计变幅杆。

2. 变幅杆相对阻抗相等点 在 $c \neq 0$ 情况下, Möbius 变换有不变点, 即对应点上 $W = Z$, 令这时的值为 Z_c , 则由式 (4.26)

$$Z_c = \frac{(a-d) \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2c}. \quad (4.30)$$

当变幅杆负载阻抗 (Z_1/Z_2) 取 Z_c 值时, 其输入阻抗也等于 Z_c 值, 即 $(Z_1/Z_2) = (Z_1/Z_1) = Z_c$, 在相对阻抗相等点上, 变幅杆的输入阻抗 (Z_1) 与负载阻抗 (Z_2) 之间的关系, 只是简单的变比关系:

$$Z_1/Z_1 = Z_1/Z_2 = S_1/S_2 = N^2.$$

3. 变幅杆的工作稳定性 变幅杆两端阻抗的映象放大率为

$$\left| \frac{dW}{dZ} \right| = \frac{R^2}{|Z - Q|^2}. \quad (4.31)$$

上式表明: 在负载平面上, 距极点 Q 向径相等各点, 映象放大率相同。在反演圆 Γ_2 (圆心 Q 、半径 R) 上, $\left| \frac{dW}{dZ} \right| = 1$; 在反演圆内, $\left| \frac{dW}{dZ} \right| > 1$; 在 Γ_2 之外, 则 $\left| \frac{dW}{dZ} \right| < 1$, 这意味着如果变幅杆工作时负载阻抗 (Z_1/Z_2) 在 Γ_2 外发生变动, 则由于 $\left| \frac{dW}{dZ} \right| < 1$, 负载阻抗变化的向长 $|\Delta Z| = |\Delta(Z_1/Z_2)|$ 将大于输入阻抗变化的向长 $|\Delta W| = |\Delta(Z_1/Z_1)|$; 变幅杆输入阻抗对负载阻抗变化不敏感, 工作比较稳定。反之, 如果在 Γ_2 内发生变动, $\left| \frac{dW}{dZ} \right| > 1$, $|\Delta W| > |\Delta Z|$, 变幅

杆输入阻抗对负载阻抗变动敏感，工作不够稳定。因此，我们可以用映象放大率 $\left| \frac{dW}{dZ} \right|$ 来衡量变幅杆的工作稳定性。 $\left| \frac{dW}{dZ} \right|$ 越小，则越稳定；反之，则越不稳定。

式(4.31)还表明：变幅杆工作稳定性除与负载至 Q 点向径有关外，且和反演半径有关。在 $|Z - Q|$ 相同条件下， R 较小者工作较稳定。

4. 谐振参数方程 对给定负载，当变幅杆的输入抗分量 $x_i = 0$ 时，我们称变幅杆处于谐振状态。此时变幅杆的相长称为谐振相长。按谐振相长和变幅杆的工作频率，我们可以定出变幅杆的谐振长度；或者由变幅杆的长度，定出谐振频率。

可以用 Möbius 反变换来确定变幅杆谐振时的相应 Z_1 值。Möbius 反变换(4.28)式，是除其极点和临界点外，由 W 平面到 Z 平面的保形映象。它将 W 平面的实轴 $x_i/Z_1 = 0$ ，变换为 Z 平面上，经 H (正变换的零点)和 Q (正变换的极点)两点，对虚轴对称的一个圆，该圆方程为

$$\left(\frac{R_1}{Z_1} \right)^2 + \left(\frac{x_1}{Z_2} - \frac{h+q}{2} \right)^2 = \left(\frac{h-q}{2} \right)^2, \quad (4.32)$$

这个方程也就是具有复数负载阻抗的变幅杆的谐振参数方程。

谐振方程是一个包括相长、线度比和负载阻抗的三参数方程。在变幅杆相长、线度比已定的情况下，由式(4.32)，凡位于以点 $j(h+q)/2$ 为圆心，以 $|h-q|/2$ 为半径的圆上各负载点 (Z_1/Z_2) ，均使得变幅杆的输入抗分量为零；由此，除 Q 点外，圆上各负载点使得变幅杆处于谐振状态。此圆我们称为给定变幅杆的谐振负载阻抗圆，如图4.7。

纯阻负载时的谐振方程

令 $x_1 = 0$ 并代入方程 (4.32), 得

$$hq = -(R_1/Z_2)^2. \quad (4.33)$$

上式就是具有纯阻负载时变幅杆的谐振方程。当选定变幅杆的尺寸和工作频率, 使得 $hq > 0$, 此时对任何纯阻负载, 变幅杆都不可能发生谐振。如果改变工作频率, 使得 hq 反号, 方程 (4.33) 成立, 则此时工作频率即为谐振频率。

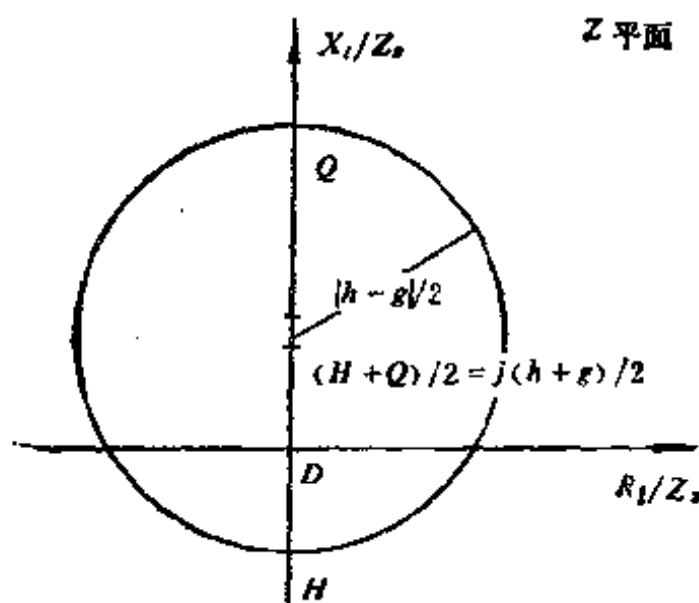


图 4.7

变幅杆的纯阻谐振负载, 是该变幅杆谐振负载阻抗圆和实轴的交点。以线度比为参数, 画出 $(-hq)$ 与相长的关系曲线, 用做图法可以求得纯阻负载时变幅杆的谐振相长。

纯抗负载时的谐振方程为

$$h = x_1/Z_2. \quad (4.34)$$

空载时 ($Z_1 = 0$) 谐振方程为

$$h = 0. \quad (4.35)$$

方程 (4.34) 的解是谐振负载阻抗圆与虚轴的一个交点。

在纯抗条件下上述三种变幅杆都有一次、二次、三次等谐振相长解。

方程(4.35)的解为 k 曲线与相长横轴的交点, 其结果与第二章中所得到的频率方程一样。

第三章 复合变幅杆的理论和设计

前一章是讨论工程上常用的几种简单形状的变幅杆。为了改进某些变幅杆的性能，如提高形状因数，增大放大系数等，同时为了满足实际应用的特殊设计，需要复合式的变幅杆。本章将讨论一些复合变幅杆的理论及设计问题。

§ 3.1 复合变幅杆的一般公式

我们讨论图 3.1 中的三段复合变幅杆。I 和 III 为等截面杆，而 II 段为变截面杆。为简化讨论，设杆的横截面为圆形截面，各段用同一种材料做成。

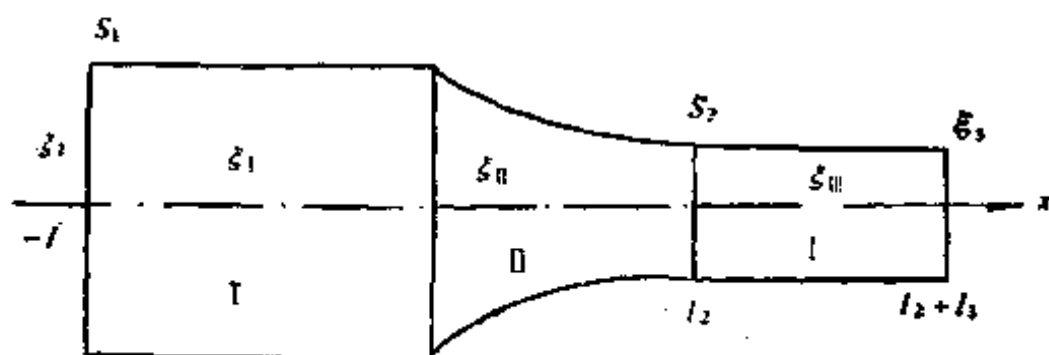


图 3.1 复合变幅杆

由变截面的波动方程 (2.2) 出发，可以求得各段杆中的振动位移，输入力阻抗，频率方程，放大系数和形状因数的一般公式。

1. 杆中各段质点振动位移

$$\xi_I = a_1 \xi_1 \cos(kx + \alpha_1) \quad (3.1)$$

$$\xi_{II} = a_2 \xi_1 \frac{R_1}{R} \cos(k'x + \alpha_2) \quad (3.2)$$

$$\xi_{III} = a_3 \xi_1 \cos(kx + \alpha_3) \quad (3.3)$$

其中 R 为杆的半径。

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{\cos(-kl_1 + \alpha_1)}; \\ \operatorname{tg} \alpha_1 &= \frac{k'}{k} \operatorname{tg} \alpha_2 + \frac{R'(0)}{kR_1}, \\ R'(0) &= \left. \frac{\partial R}{\partial x} \right|_{x=0}, \\ a_2 &= \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_2} \cdot \frac{1}{\cos(-kl_1 + \alpha_1)}; \\ \operatorname{tg}(k'l_2 + \alpha_2) &= -\frac{k}{k'} \operatorname{tg} kl_3 - \frac{R'(l_2)}{k'R_2}, \\ R'(l_2) &= \left. \frac{\partial R}{\partial x} \right|_{x=l_2}, \\ a_3 &= N \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_2} \cdot \frac{\cos(k'l_2 + \alpha_2)}{\cos(-kl_1 + \alpha_1)} \cdot \frac{1}{\cos kl_3}; \\ \alpha_3 &= -(kl_2 + kl_3), \\ k'' &= k^2 - \frac{1}{k} \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} = k^2 - \frac{R''}{R}, \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

只讨论 R'' 为常数的情况

2. 输入力阻抗

$$Z_i = jZ_{01} \operatorname{tg}(kl_1 - \alpha_1) \quad (3.5)$$

3. 频率方程(两端自由)组为

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg}(k'l_2 + \alpha_2) + \frac{k}{k'} \operatorname{tg} kl_3 + \frac{R'(l_2)}{k'R_2} &= 0, \\ \operatorname{tg} \alpha_2 &= \frac{k}{k'} \operatorname{tg} kl_1 - \frac{1}{k'} \frac{R'(0)}{R_1}. \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

4. 放大系数 M_p

$$M_p = \left| N \frac{\cos(k'l_2 + \alpha_2)}{\cos \alpha_2} \cdot \frac{\cos kl_1}{\cos kl_2} \right|. \quad (3.7)$$

5. 形状因数 φ

$$\varphi = |k\xi_3| / \left| \frac{\partial \xi}{\partial x} \right|_{\max}. \quad (3.8)$$

§ 3.2 带有特定形状过渡段的阶梯形变幅杆

在第二章中我们分析了两段长度相等而截面不同的平直杆组成的阶梯形变幅杆，其放大系数最大 ($M_p = N^2$)，但其形状因数 φ 较小。理论上 $\varphi = 1$ ，但由于截面交界处突变，存在着应力集中，所以实际上所能达到的 φ 值总小于 1，不适合在高振幅的情况下工作。而简单指数形、悬链线及圆锥形变幅杆虽然 φ 值较大，但是放大系数 M_p 比阶梯形变幅杆小。为兼顾 φ 及 M_p 值，可以采用带有一定形状过渡段的阶梯形变幅杆 ($kl_1 = kl_2$)。

将 $kl_1 = kl_2$ 代入谐振频率方程组的一般公式 (3.6) 可以得到带有特殊形状过渡段的阶梯形变幅杆的频率公式为

$$a \lg^2 kl_1 + b \lg kl_1 + c = 0. \quad (3.9a)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{k^2}{k'} \lg k'l_2, \\ b &= \frac{k}{k'} \left[\frac{R'(l_2)}{R_2} - \frac{R'(0)}{R_1} \right] \lg k'l_2 - 2k, \\ c &= \frac{R'(0)}{R_1} - \frac{R'(l_2)}{R_2} - \left[k' + \frac{1}{k'} \frac{R'(0)}{R_1} \cdot \frac{R'(l_2)}{R_2} \right] \lg k'l_2. \end{aligned} \right\} \quad (3.9b)$$

则有

$$\operatorname{tg} kl_1 = \frac{1}{2a} [-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}], \quad (3.9c)$$

在式(3.9c)中, 当 $k'l_2 \leq \pi$ 时, 取正号; 当 $k'l_2 > \pi$ 时, 取负号.

将 $kl_1 = k'l_2$ 代入式(3.7)得放大系数

$$\begin{aligned} M_p &= N \left| \frac{\cos(k'l_2 + \alpha_2)}{\cos \alpha_2} \right| \\ &= |N(\cos k'l_2 - \operatorname{tg} \alpha_2 \cdot \sin k'l_2)|. \end{aligned} \quad (3.10)$$

3.2.1 具有圆锥形过渡段的阶梯形变幅杆

圆锥形过渡段的截面变化规律为

$$R = R_1(1 - \alpha x),$$

则

$$R'' = 0, \quad k' = k.$$

1. 频率方程 由式(3.9c)得

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} kl_1 &= \frac{\alpha}{2k} (N - 1) + \operatorname{ctg} kl_2 \\ &\pm \sqrt{\operatorname{ctg}^2 kl_2 + 1 + \left[\frac{\alpha}{2k} (N + 1) \right]^2}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

2. 位移分布

$$\left. \begin{aligned} \xi_I &= \xi_1 \cos(kx + kl_1), \\ \xi_{II} &= \frac{a_2 \xi_1}{1 - \alpha x} \cos(kx + \alpha_2), \\ \xi_{III} &= a_3 \xi_1 \cos[kx - (kl_2 + kl_3)], \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} a_2 &= \frac{\cos kl_1}{\cos \alpha_2}; \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \operatorname{tg} kl_1 + \frac{\alpha}{k}, \\ a_3 &= N[\cos kl_2 - \operatorname{tg} \alpha_2 \cdot \sin kl_2], \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

3. 位移节点

$$kx_0 = \frac{\pi}{2} - \alpha_1. \quad (3.14)$$

4. 放大系数

$$M_p = |N(\cos kl_1 - \operatorname{tg} \alpha_2 \cdot \sin kl_1)|. \quad (3.15)$$

5. 形状因数 φ

$$\text{当满足条件 } \operatorname{tg}(kl_1 + \alpha_2) > \frac{N\alpha}{k} - \frac{1}{2} \cdot \frac{k}{N\alpha} \text{ 时,} \quad (3.16)$$

$$\varphi = \left| \frac{2\alpha}{k} \cdot \frac{a_3}{a_2} \sec(kx_M + \alpha_2) \right|.$$

x_M 为应变极大点的坐标, 可由下式解出:

$$\operatorname{tg}(kx_M + \alpha_2) = \frac{\alpha}{k} \cdot \frac{1}{1 - \alpha x_M} - \frac{k}{2\alpha} (1 - \alpha x_M). \quad (3.17)$$

当式 (3.16) 不满足时, 过渡段没有应变极大点, 应变最大点在 $x_M = l_2$ 处, 此时

$$\varphi = \frac{1}{\sin kl_2}. \quad (3.18)$$

6. 输入力阻抗

$$Z_i = jZ_0 \operatorname{tg}(kl_1 - \alpha_1).$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_1 &= \operatorname{tg} \alpha_2 - \frac{\alpha}{k}, \\ \operatorname{tg}(kl_1 + \alpha_2) &= -\operatorname{tg} kl_2 + \frac{N\alpha}{k}. \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

3.2.2 具有指数形过渡段的阶梯形变幅杆

指数形过渡段的截面变化规律为

$$R = R_1 e^{-\beta x}, \quad \beta l_2 = \ln N, \quad k'^2 = k^2 - \beta^2,$$

与上述情况类似处理后得

1. 频率方程

$$\operatorname{tg} 2kl_1 = -\frac{k}{k'} \operatorname{tg} k'l_2. \quad (3.20)$$

2. 位移分布

$$\left. \begin{aligned} \xi_I &= \xi_1 \cos(kx + kl_1), \\ \xi_{II} &= \xi_1 a_2 e^{\beta x} \cos(k'x + \alpha_2), \\ \xi_{III} &= \xi_1 a_3 \cos[kx - k(l_2 + l_3)]. \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_2 &= \frac{k}{k'} \operatorname{tg} kl_1 + \frac{\beta}{k'}, \\ a_2 &= (\cos kl_1) / (\cos \alpha_2), \\ a_3 &= N[\cos k'l_2 - \operatorname{tg} \alpha_2 \sin(k'l_2)]. \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

3. 放大系数

$$M_p = |N(\cos k'l_2 - \operatorname{tg} \alpha_2 \sin k'l_2)|. \quad (3.23)$$

4. 位移节点

$$kx_1 = \frac{k}{k'} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_2 \right). \quad (3.24)$$

5. 形状因数 φ

$$\text{当满足条件 } \operatorname{tg}(k'l_2 + \alpha_2) > \frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{k'} - \frac{k'}{\beta} \right) \text{ 时,} \quad (3.25)$$

$$\varphi = \left| \frac{2\beta}{k} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot e^{-\beta x_M} \sec(k'x_M + \alpha_2) \right|. \quad (3.26)$$

而应变极大点的坐标可由下式求出:

$$\operatorname{tg}(k'x_M + \alpha_2) = \frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{k'} - \frac{k'}{\beta} \right). \quad (3.27)$$

当 $kl_2 \leq \beta l_2$ 时, 过渡段没有应变极大点. 当过渡段不存在应变极大点时, 有

$$kx_M = kl_2, \quad \varphi = \frac{1}{\sin kl_2}. \quad (3.28)$$

6. 输入力阻抗

$$Z_i = jZ_{01} \operatorname{tg}(kl_1 - \alpha_1). \quad (3.29)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_1 &= \frac{k'}{k} \operatorname{tg} \alpha_2 - \frac{\beta}{k}; \\ \operatorname{tg}(k'l_2 + \alpha_2) &= -\frac{k}{k'} \operatorname{tg} kl_2 + \frac{\beta}{k'}. \end{aligned} \right\} \quad (3.30)$$

3.2.3 具有悬链线形过渡段的阶梯形变幅杆

悬链线形过渡段的截面变化规律为

$$R = R_2 \operatorname{ch} \gamma(l_2 - x); \quad \gamma l_2 = \operatorname{arcch} N,$$

$$k_0'^2 = k^2 - \gamma^2.$$

则有

1. 频率方程

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} kl_1 &= -\frac{\gamma}{2k} \operatorname{th} \gamma l_2 + \frac{k_0'}{k} \operatorname{ctg} k_0' l_2 \\ &+ \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2k} \operatorname{th} \gamma l_2\right)^2 + \left(\frac{k_0'}{k} \operatorname{ctg} k_0' l_2\right)^2 + \left(\frac{k_0'}{k}\right)^2}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

2. 位移分布

$$\left. \begin{aligned} \xi_I &= \xi_1 \cos(kx + kl_1), \\ \xi_{II} &= \xi_2 \frac{Na_2}{\operatorname{ch} \gamma(l_2 - x)} \cos(k_0'x + \alpha_2), \\ \xi_{III} &= \xi_3 a_3 \cos k[x - (l_2 + l_3)], \end{aligned} \right\} \quad (3.32)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_2 &= \frac{k}{k_0'} \operatorname{tg} kl_1 + \frac{\gamma}{k_0'} \operatorname{th} \gamma l_2; \\ a_2 &= \frac{\cos kl_1}{\cos \alpha_2}; \quad a_3 = N[\cos k_0' l_2 - \operatorname{tg} \alpha_2 \sin k_0' l_2]. \end{aligned} \right\} \quad (3.33)$$

3. 位移节点

$$kx_0 = \frac{k}{k_0'} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_2 \right). \quad (3.34)$$

4. 放大系数

$$M_p = |N(\cos k'_0 l_2 - \operatorname{tg} \alpha_2 \cdot \sin k'_0 l_2)|. \quad (3.35)$$

5. 形状因数 φ

$$\varphi = \left| 2 \frac{\gamma}{k} \cdot \frac{a_3}{Na_2} \operatorname{sh} \gamma(l_2 - x_M) \sec(k'_0 x_M + \alpha_2) \right|. \quad (3.36)$$

其中应变极大点坐标 x_M 由下式求得

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(k'_0 x_M + \alpha_2) &= \frac{\gamma}{k'_0} \operatorname{th} \gamma(l_1 - x_M) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{k'_0} + \frac{k'_0}{\gamma} \right) \operatorname{cth} \gamma(l_2 - x_M). \end{aligned} \quad (3.37)$$

6. 输入力阻抗

$$Z_i = jZ_{01} \operatorname{tg}(kl_1 - \alpha_1). \quad (3.38)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_1 &= \frac{k'_0}{k} \operatorname{tg} \alpha_2 - \frac{\gamma}{k} \operatorname{th} \gamma l_2, \\ \operatorname{tg}(k'_0 l_2 + \alpha_1) &= -\frac{k}{k'_0} \operatorname{tg} k l_3. \end{aligned} \right\} \quad (3.39)$$

3.2.4 具有特定形状过渡段的阶梯形变幅杆的设计计算图表^[14]

前面讨论了具有指数形、圆锥形和悬链线形过渡段的阶梯形复合变幅杆的设计计算公式。为便于工程设计，将这些公式作类似于 § 2.8 的变换，并列于表 3.1 中。表中 1, 2, 3 (包括系数的下标) 分别表示指数形、圆锥形和悬链线形过渡段的复合阶梯形变幅杆。在 $KL_1 = KL_2 = 0.1\pi + 0.025\pi \times n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$); $N = 1.1 \sim 10$ 时计算这三种复合杆过渡段的 H, G, E 值及性能参数列于表 3.2—3.7 中。而图 3.2—3.7 给出 M, φ 与 KL_1 的关系曲线及 M, φ 与 N 的关系

曲线。

从以上图表,我们着重分析一下放大系数 M 和形状因数 φ 。

1. 放大系数 M_p KL_1 一定时,第一、三种复合变幅杆的 M_p 值都随 N 值的增加而增大。在某些 KL_1 值时, N 达到某一数值,其过渡段就不能满足限制条件,因此能满足限制条件的最大 N 值时的 M_p 值,就是该 KL_1 值两种复合变幅杆所能得到的最大放大系数。

第二种复合杆在 $KL_1 \leq 0.175\pi$ 和 $KL_1 \geq 0.4\pi$ 时, M_p 值随 N 增加而增大。在 $0.2\pi \leq KL_1 \leq 0.375\pi$ 范围内, M_p 先是随着 N 的增加而增大,但增长速度越来越慢,到一定 N 值后 M_p 反而随 N 的增加而变小。最大 M_p 值不在 $N = 10$ 处(见表 3.7)。图 3.2 表示在 $N = 10$ 范围内各种 KL_1 值的三种复合变幅杆所能达到的最大 M_p 值。 N 和 KL_1 都相同时 $M_3 > M_1 > M_2$ 。

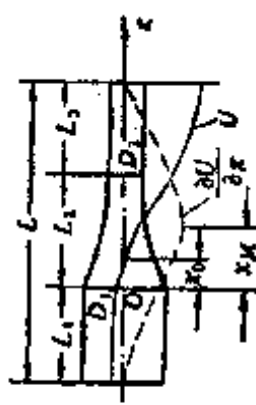
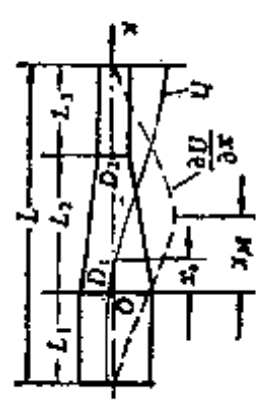
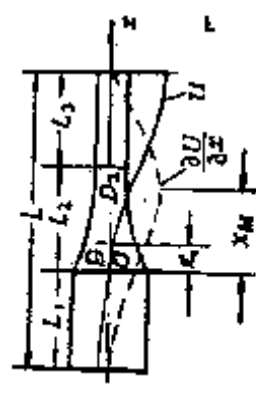
2. 形状因数 φ KL_1 一定时,第三种复合变幅杆的 φ 值随 N 值的增加而增大;而第一、二种复合变幅杆的 φ 值随 N 增加到一定值后, φ 不变(见图 3.5)。 N 一定值时,第三种复合变幅杆的 φ 值随 KL_1 的增大而变小;而第一、二种复合变幅杆则有获得最大 φ 值的 KL_1 (见图 3.6)。

✓设计例子

设工作频率 $f = 20 \text{ kHz}$, 输入端位移振幅 $A_1 = 4 \mu\text{m}$; 输出端位移振幅 $A_2 = 70 \mu\text{m}$ 。变幅杆材料的声速取 $c = 5.2 \times 10^5 \text{ cm/s}$, 疲劳应力取 25 kg/mm^2 。则可算得 $M_p = 17.5$, $\varphi = 1.44$ 。

由设计用表可知,第一种变幅杆和第二种复合阶梯形变幅杆都不能同时满足这两个条件。只有 $KL_1 = 0.125\pi \sim 0.225\pi$ 的第一种和 $KL_1 = 0.1\pi \sim 0.15\pi$ 的第三种复合阶梯

表 3.1 含指数形、圆锥形、悬链线形过渡段的(等长圆柱阶梯半波长)复合变幅杆的计算式

过渡段类型	指数形	圆锥形	悬链线形
图示			
过渡段截面与 X 坐标和其它参数的关系	$D = D_1 e^{-\beta x}$ $\beta = \ln N / L_2 \quad K_1 = \sqrt{K^2 - \beta^2}$	$D = D_1 (1 - \alpha x)$ $\alpha = \frac{N - 1}{N} \cdot \frac{1}{L_2}$	$D = D_2 \operatorname{ch} [\gamma (L_2 - x)]$ $\gamma = \operatorname{ch}^{-1} N / L_2 \quad K_2 = \sqrt{K^2 - \gamma^2}$

频率方程	$\frac{1}{2} \cdot \frac{(N-1)^2}{N} \cdot \frac{1}{KL_2} + \operatorname{ctg}(KL_2)$ $\pm \sqrt{\operatorname{ctg}^2(KL_2) + 1}$ $\leftarrow + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{N^2-1}{N} \cdot \frac{1}{KL_2} \right)^2$ $- \operatorname{tg}(KL_1) = 0$ $(KL_2 \leq \pi \text{ 根号前用正号, } KL_2 > \pi \text{ 用负号.})$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{\operatorname{th}(\operatorname{ch}^{-1}N)}{\sqrt{1 + \left(\frac{K_3 L_2}{\operatorname{ch}^{-1}N}\right)^2}}$ $- \frac{1}{\operatorname{tg}(K_3 L_2) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\operatorname{ch}^{-1}N}{K_3 L_2}\right)^2}}$ $- \sqrt{\frac{\operatorname{th}^2(\operatorname{ch}^{-1}N)}{1 + \left(\frac{K_3 L_2}{\operatorname{ch}^{-1}N}\right)^2} \cdot \frac{1}{4}}$ $+ \frac{\operatorname{ctg}^2(K_3 L_2)}{1 + \left(\frac{\operatorname{ch}^{-1}N}{K_3 L_2}\right)^2} + \frac{1}{1 + \left(\frac{\operatorname{ch}^{-1}N}{K_3 L_2}\right)^2}$ $+ \operatorname{tg}(KL_1) = 0$
过渡段长度 L_2 及长度系数 H	$L_2 = H \cdot \frac{\lambda}{2}$	$H_2 = \frac{KL_2}{\pi}$
放大系数 M	$H_1 = \frac{1}{\pi} \sqrt{(K_1 L_2)^2 + (\ln N)^2}$ $\operatorname{tg} \alpha_{11} = \frac{\pi H_1}{K_1 L_2} \operatorname{tg}(KL_1) + \frac{\ln N}{K_1 L_2}$	$H_3 = \frac{1}{\pi} \sqrt{(K_3 L_2)^2 + (\operatorname{ch}^{-1}N)^2}$ $\operatorname{tg} \alpha_{13} = \operatorname{tg}(KL_1) + \frac{N-1}{N} \cdot \frac{1}{K L_2}$ $\operatorname{tg} \alpha_{13} = \left(\frac{\pi H_3}{K_3 L_2} \right) \operatorname{tg}(K L_1) + \left(\frac{\operatorname{ch}^{-1}N}{K_3 L_2} \right) \operatorname{th}(\operatorname{ch}^{-1}N)$
	$a_3 = N[\cos(K' L_2) - \operatorname{tg} \alpha_2 \cdot \sin(K' L_2)]$ $M = a_3 $	(其中 $K' L_2$ 因不同类型过渡段分别为 $K_1 L_1$、$K_2 L_2$、$K_3 L_3$; α_2 分别为 α_{11}、α_{12}、α_{13})

表 3.1(续)

过渡段类型	指数形	圆锥形	最陡线形
位移节点长度 x_0 及位移节点 长度系数 G	$x_0 = G \cdot \frac{\lambda}{2}$		
	$G_1 = \frac{H_1}{K_1 L_1} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_{11} \right)$	$G_2 = \frac{1}{2} - \frac{\alpha_{12}}{\pi}$	$G_3 = \frac{H_3}{K_3 L_3} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_{33} \right)$
	$x_M = E \cdot \frac{\lambda}{2}$		
	$a_2 = \frac{\cos(KL_1)}{\cos \alpha_2}$		
应变速率大点长 度 x_M 、应变系 数 E 及形状因 数 φ	若 $\lg(K_1 L_1 + \alpha_{11})$ $> \frac{1}{2} \left(\frac{\ln N}{K_1 L_1} - \frac{K_1 L_1}{\ln N} \right) (*)$ 则由超越方程 $\lg \left(K_1 L_1 \frac{E_1}{H_1} + \alpha_{11} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\ln N}{K_1 L_1} - \frac{K_1 L_1}{\ln N} \right)$	若 $\lg(KL_1 + \alpha_{11})$ $> \frac{N-1}{KL_1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{KL_1}{N-1} (**)$ 则由超越方程 $\lg(\pi E_2 + \alpha_{22}) = \frac{N-1}{N} \cdot \frac{1}{KL_1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{N-1}{N} \cdot \frac{E_1}{H_1}} - \frac{1}{2}$	由超越方程 $\lg \left(K_3 L_3 \frac{E_3}{H_3} + \alpha_{33} \right) = \frac{\text{ch}^{-1} N}{K_3 L_3} \cdot \text{ch} \left[(\text{ch}^{-1} N) \cdot \left(1 - \frac{E_3}{H_3} \right) \right] - \frac{1}{2} \left(\frac{\text{ch}^{-1} N}{K_3 L_3} + \frac{K_3 L_3}{\text{ch}^{-1} N} \right)$

	解出 E_1 $\varphi_1 = \left \frac{2 \ln N}{\pi H_1} \cdot \frac{a_{31}}{a_{11}} \cdot e^{-\ln N \cdot \frac{E_1}{H_1}} \right $ $\frac{1}{\cos \left(K_1 L_1 \frac{E_1}{H_1} + \alpha_{31} \right)}$ 若(*)式不成立, 则 $E_1 = H_1$ $\varphi_1 = \frac{1}{\sin(KL_1)}$	解出 E_2 $\varphi_2 = \left \frac{\frac{N}{N-1} \cdot KL_2}{\left(1 - \frac{N-1}{N} \cdot \frac{E_2}{H_2}\right)} \cdot \frac{2(N-1)}{N} \cdot \frac{1}{KL_2} \cdot \frac{a_{31}}{a_{11}} \right $ $\frac{1}{\cos(\pi E_2 + \alpha_{23})}$ 若(**)式不成立, 则 $E_2 = H_2$ $\varphi_2 = \frac{1}{\sin(KL_2)}$	解出 E_3 $\varphi_3 = \left \frac{2}{N} \cdot \frac{\text{ch}^{-1} N}{\pi H_3} \cdot \frac{a_{31}}{a_{11}} \cdot \text{sh} \left[(\text{ch}^{-1} N) \left(1 - \frac{E_3}{H_3}\right) \right] \right $ $\frac{1}{\cos \left(K_3 L_2 \frac{E_3}{H_3} + \alpha_{23} \right)}$	$cN_1 = \frac{\ln N}{\pi H_1} < 1$	限制条件
L_1, L_3	$L_1 = L_3 = \frac{KL_1}{\pi} \cdot \frac{\lambda}{2} = \frac{KL_3}{\pi} \cdot \frac{\lambda}{2}$			$cN_3 = \frac{\text{ch}^{-1} N}{\pi H_3} < 1$	
L	$L = \left(H + 2 \cdot \frac{KL_1}{\pi} \right) \cdot \frac{\lambda}{2}$				

表 3.2 含过渡段的三种阶梯形复合杆参数对比总表

$$KL_1 = KL_2 = 0.225\pi$$

N	H ₁	H ₂	H ₃	G ₁	G ₂	G ₃	M ₁	M ₂	M ₃	φ_1	φ_2	φ_3
1.1	0.5509	0.5515	0.5385	0.2656	0.2656	0.2594	1.16	1.16	1.16	1.07	1.08	1.04
1.5	0.5662	0.5772	0.5185	0.2395	0.2441	0.2199	1.89	1.87	1.95	1.29	1.32	1.15
2.0	0.5961	0.6275	0.5216	0.2224	0.2337	0.1961	2.93	2.82	3.19	1.43	1.51	1.22
2.5	0.6281	0.6815	0.5358	0.2126	0.2300	0.1837	4.10	3.74	4.70	1.50	1.54	1.26
2.9	0.6531	0.7232	0.5500	0.2074	0.2289	0.1776	5.11	4.40	6.08	1.53	1.54	1.28
3.0	0.6592	0.7332		0.2063	0.2287		5.37	4.56		1.53	1.54	
3.5	0.6884	0.7806		0.2019	0.2285		5.71	5.25		1.54	1.54	
4.0	0.7155	0.8232		0.1987	0.2286		8.12	5.81		1.54	1.54	
4.5	0.7407	0.8609		0.1963	0.2290		9.58	6.25		1.54	1.54	
5.0	0.7641	0.8942		0.1943	0.2294		11.09	6.58		1.54	1.54	
5.5	0.7860	0.9233		0.1927	0.2297		12.65	6.83		1.54	1.54	
6.0	0.8064	0.9492		0.1914	0.2301		14.24	7.00		1.54	1.54	
6.5	0.8257	0.9718		0.1903	0.2304		15.87	7.12		1.54	1.54	
7.0	0.8438	0.9917		0.1894	0.2307		17.53	7.20		1.54	1.54	
7.5	0.8608	1.0093		0.1886	0.2310		19.23	7.25		1.54	1.54	
8.0	0.8770	1.0248		0.1879	0.2312		20.95	7.27		1.54	1.54	
8.5	0.8924	1.0386		0.1872	0.2314		22.69	7.28		1.54	1.54	
9.0	0.9071	1.0509		0.1867	0.2315		24.46	7.27		1.54	1.54	
9.5	0.9210	1.0619		0.1862	0.2317		26.25	7.26		1.54	1.54	
10.0	0.9344	1.0718		0.1857	0.2318		28.07	7.24		1.54	1.54	

形变幅杆,在某些 N 值可以同时满足.其中以 $KL_1=0.225\pi$, $N=7$ 的第一种和 $KL_1=0.15\pi$, $N=6.3$ 的第三种复合阶

表 3.3 含指数形过渡段的阶梯形复合杆参数表

$$KL_1 = KL_2 = 0.250\pi$$

N	K_1L_2	H_1	G_1	M_1	E_1	φ_1	CN_1
1.1	1.570802	0.500921	0.240798	1.16877	0.27945	1.07622	0.06056
1.2	1.570802	0.503359	0.233165	1.34734	0.30723	1.14135	0.11530
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2.3	1.570804	0.565944	0.195142	3.82289	0.54646	1.41151	0.46846
2.4	1.570804	0.572415	0.193563	4.08519	0.56414	1.41374	0.48683
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
9.9	1.570807	0.884601	0.169146	31.96366	0.88460	1.41422	0.82493
10.0	1.570807	0.887242	0.169076	32.40332	0.88724	1.41422	0.82608

表 3.4 含圆锥形过渡段的阶梯形复合杆参数表

$$KL_1 = KL_2 = 0.250\pi$$

N	K_2L_1	H_1	G_1	M_1	E_1	φ_1
1.1	1.575532	0.501507	0.241077	1.16866	0.27987	1.07774
1.2	1.588086	0.505503	0.234144	1.34648	0.30920	1.14797
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2.5	1.985785	0.632095	0.208461	3.98699	0.63209	1.41422
2.6	2.019831	0.642932	0.208164	4.18451	0.64293	1.41422
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
9.9	3.278942	1.043720	0.211810	8.07966	1.04372	1.41422
10.0	3.285345	1.045758	0.211838	8.07185	1.04576	1.41422

梯形变幅杆所需的 N 值最小. 表 3.8 是根据设计用表列出的两种复合变幅杆的几何尺寸及性能参数. 图 3.8 给出第一种复合变幅杆的例子.

表 3.5 含悬链线形过渡段的阶梯形复合杆参数表

$$KL_1 = KL_3 = 0.250\pi$$

N	$K_3 f_2$	H_3	G_3	M_3	E_3	φ_3	GN_3
1.1	1.470812	0.489001	0.235112	1.17090	0.27107	1.04108	0.28874
1.2	1.377644	0.481189	0.223055	1.35602	0.28784	1.07467	0.41170
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2.2	0.482155	0.478978	0.170935	3.92072	0.37734	1.21720	0.94728
2.3	0.340195	0.481847	0.168737	4.24326	0.38350	1.22285	0.97442
2.4	0.063103	0.484909	0.166779	4.57704	0.38945	1.22787	0.99914
(以下不满足 $f > \frac{\gamma c}{2\pi}$ 的限制条件、频率方程无解)							

表 3.6 第一、三种复合杆满足限制条件的情况

$KL_1 (= KL_3)$	能满足限制条件的直径比 N	
	第二种复合杆	第三种复合杆
0.15 π		7.0
0.175 π		4.8
0.2 π		3.6
0.225 π		2.9
0.25 π		2.4
0.275 π		2.0
0.3 π		1.7
0.325 π	7.1	1.5
0.35 π	3.9	1.4
0.375 π	2.7	1.2
0.4 π	2.0	1.1
0.45 π	1.3	1.0

注: 未列的 $KL_1 = 0.1\pi$ 、 0.125π 和表中未填者在 $N = 10$ 范围内均可满足限制条件。

表 3.7 $M_{\max}$ 不在 $N = 10$ 的第二种复合杆

$KL_1 (= KL_3)$	0.2 π	0.225 π	0.25 π	0.275 π	0.3 π	0.325 π	0.35 π	0.375 π
存在 $M_{\max}$ 时的 直径比 N	9	8.5	8.2	8.0	8.0	8.1	8.5	9.2
$M_{\max}$	6.60	7.28	8.16	9.32	10.88	13.07	16.30	21.40

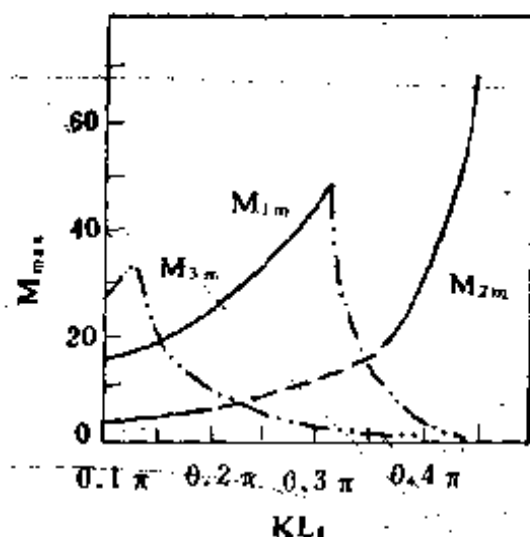


图 3.2 $M_{\max}$ 与 KL_1 的关系曲线

——最大 M 值在 $N = 10$ - - - - 最大 M 值不在 $N = 10$
 ····因 $N \approx 10$ 不满足限定条件, 最大 M 值不在 $N = 10$

表 3.8 满足 $M \geq 17.5$, $\varphi \geq 1.44$ 的两种复合杆

项 目		第一种复合杆	第三种复合杆
N		7	6.3
M		17.53	17.49
$KL_1 (= KL_3)$		0.225π	0.15π
L_1	H	0.843754	0.816512
	$L_1 = H \cdot \frac{\lambda}{2}$ (mm)	109.69	106.15
x_D	G	0.189397	0.213796
	$x_D = G \cdot \frac{\lambda}{2}$ (mm)	24.62	27.79
x_M	R	0.84375	0.66141
	$x_M = R \cdot \frac{\lambda}{2}$ (mm)	109.69	85.98
φ		1.53977	1.47221
$L = \left(H + 2 \cdot \frac{KL_1}{\pi} \right) \frac{\lambda}{2}$ (mm)		168.19	145.15
$CN < 1$		0.73410	0.98526

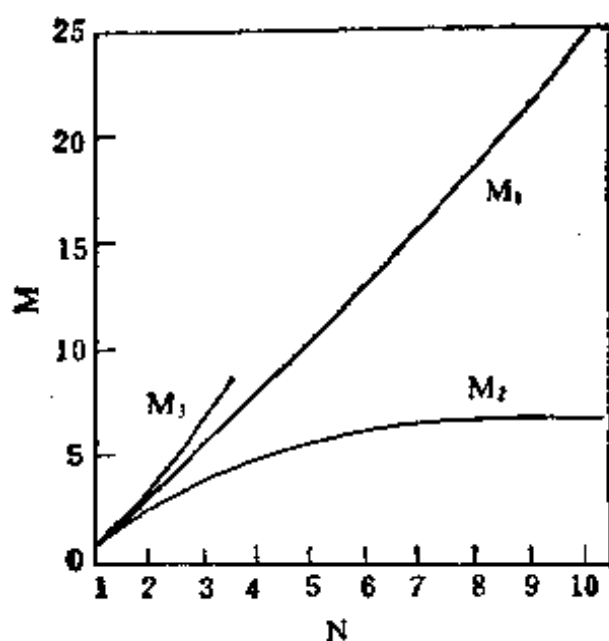


图 3.3 含过渡段复合阶梯形变幅杆放大系数 M 与面积系数 N 的关系
($KL_1 = KL_2 = 0.200\pi$)

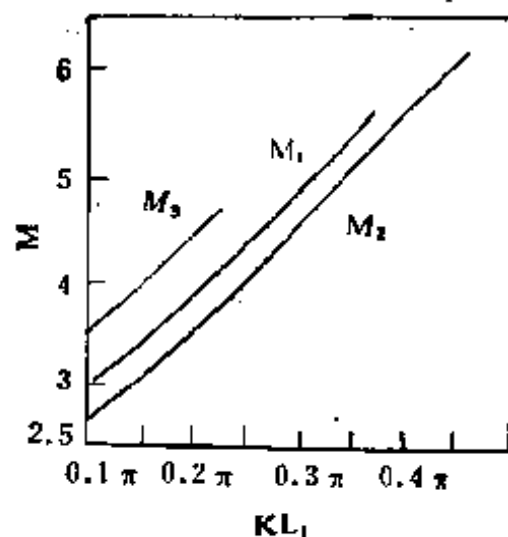


图 3.4 含过渡段复合阶梯形变幅杆的放大系数 M 与 KL_1 的关系。
($N = 2.5$)

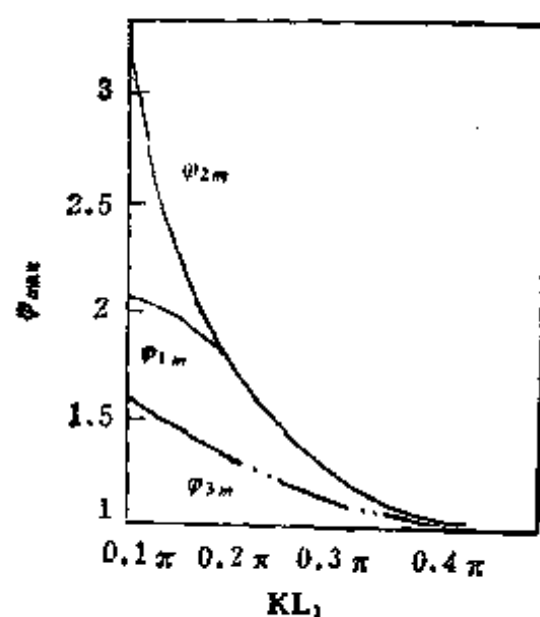


图 3.5 含过渡段复合阶梯形变幅杆的形状
因数 φ 与 KL_1 的关系

—— φ_m 值与 $N=10$ 时 φ 相同

--- $N=10$ 不满足限制条件, φ_m 在满足限制条件的最大 N 值处.

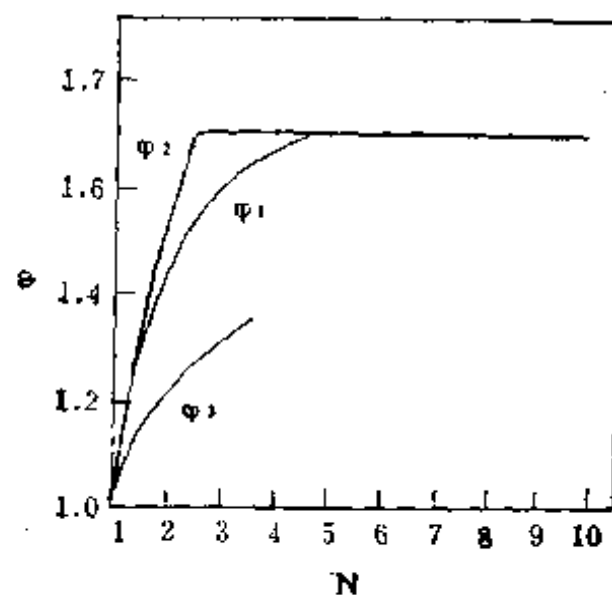


图 3.6 含过渡段复合阶梯形变幅杆的形状因数
 φ 与面积系数 N 的关系

($KL_1 = KL_3 = 0.200\pi$)

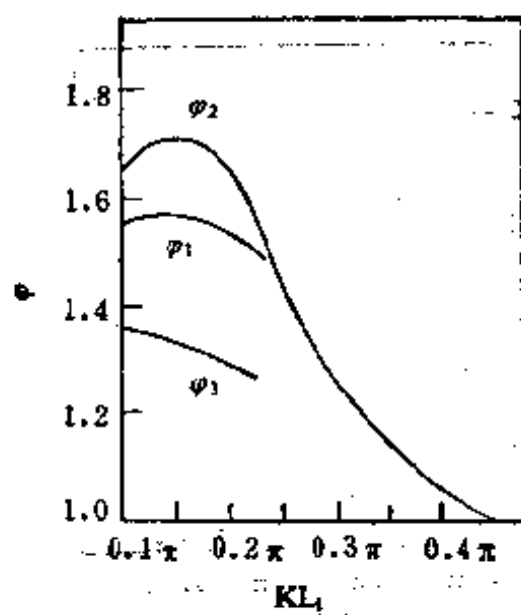
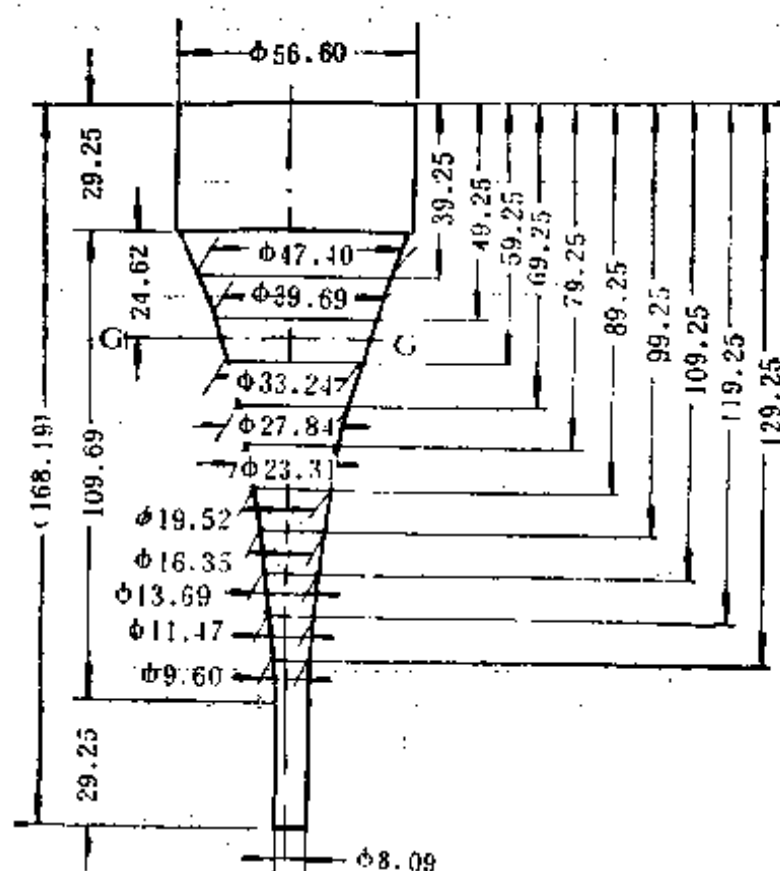


图 3.7 含过渡段复合阶梯形变幅杆的形状因数
 φ 与 KL_1 的关系
($N = 2.5$)



材料: 调质45°钢 频率: 20 kHz $M: 17.5$ $\varphi: 1.54$ G-G 表示节点位置

图 3.8 含指数形过渡段复合阶梯形变幅杆设计实例

§ 3.3 一端带有圆柱杆的复合变幅杆

这一节我们只介绍几种工程上较有用的复合变幅杆。

3.3.1 宽端接圆柱杆的复合悬链线形变幅杆

这种变幅杆如图 3.9 所示,

$$kl_3 = 0.$$

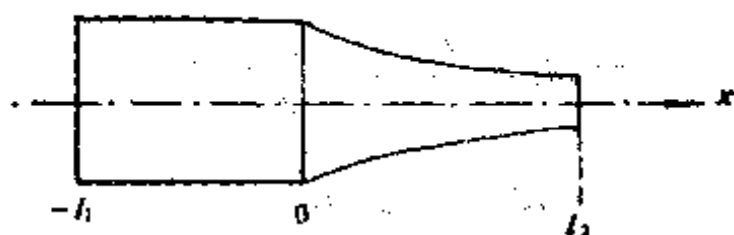


图 3.9 宽端接圆柱杆的复合悬链线形变幅杆

1. 频率方程

$$\operatorname{tg} kl_1 = -\frac{k'_0}{k} \operatorname{tg} k'_0 l_2 - \frac{\gamma}{k} \operatorname{th} \gamma l_2. \quad (3.40)$$

2. 位移分布

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= \xi_1 \cos(kx + kl_1), \\ \xi_{II} &= -\xi_1 \frac{Na_2}{\operatorname{ch} \gamma(l_2 - x)} \cos k'_0(l_2 - x). \end{aligned} \right\} \quad (3.41)$$

其中

$$a_2 = -\frac{\cos kl_1}{\cos k'_0 l_2}.$$

3. 位移节点

$$kx_0 = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - kl_1; & \text{当 } k'_0 l_2 \leq \frac{\pi}{2}, \text{ 即 } kl_1 \geq \frac{\pi}{2} \text{ 时,} \\ \frac{k}{k'_0} \left(k'_0 l_2 - \frac{\pi}{2} \right); & \text{当 } k'_0 l_2 > \frac{\pi}{2}, \text{ 即 } kl_1 < \frac{\pi}{2} \text{ 时.} \end{cases} \quad (3.42)$$

4. 放大系数

$$M_p = \left| N \frac{\cos kl_1}{\cos k'_0 l_2} \right|. \quad (3.43)$$

5. 形状因数

这种变幅杆， l_2 段总存在应变极大点。当 $kl_1 > \frac{\pi}{2}$ 时 l_1 段也有应变极大点，此时若

$$\left| \frac{\partial \xi_I}{\partial x} \right|_{\max} > \left| \frac{\partial \xi_{II}}{\partial x} \right|_{\max},$$

则

$$\varphi = M_p; \quad \left(kx_M = \frac{\pi}{2} - kl_1 \right). \quad (3.44)$$

若

$$\left| \frac{\partial \xi_I}{\partial x} \right|_{\max} < \left| \frac{\partial \xi_{II}}{\partial x} \right|_{\max},$$

则

$$\varphi = \left| 2 \frac{\gamma}{k} \operatorname{sh} \gamma(l_2 - x_{M_1}) / \cos k'_0(l_2 - x_{M_2}) \right|. \quad (3.45)$$

x_M 由式 (3.37) 求得。

6. 输入力阻抗

$$\left. \begin{aligned} Z_i &= jZ_{01} \operatorname{tg}(kl_1 - \alpha_1), \\ \operatorname{tg} \alpha_1 &= -\frac{k'_0}{k} \operatorname{tg} k'_0 l_2 - \frac{\gamma}{k} \operatorname{th} \gamma l_2. \end{aligned} \right\} \quad (3.46)$$

3.3.2 窄端带有圆柱杆的复合圆锥形变幅杆

此时 $kl_1 = 0$ ，其形状如图 3.10 所示

1. 频率方程

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} kl_2 &= \frac{N\alpha}{k} - \operatorname{tg}(kl_2 + \alpha_2), \\ \operatorname{tg} \alpha_2 &= \frac{\alpha}{k}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

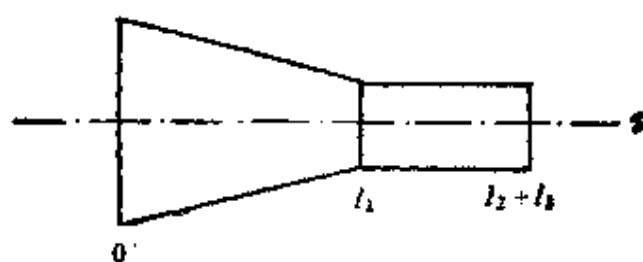


图 3.10 窄端带有圆柱杆的复合圆锥形变幅杆

2. 位移分布

$$\left. \begin{aligned} \xi_{II} &= \xi_1 a_2 \cos(kx + \alpha_2) / (1 - \alpha x), \\ \xi_{III} &= \xi_1 a_3 \cos[kx - k(l_2 + l_3)]. \end{aligned} \right\} \quad (3.48)$$

其中

$$a_2 = \frac{1}{\cos \alpha_2}; \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\alpha}{k},$$

$$a_3 = \frac{N}{\cos kl_3} \left[\cos kl_2 - \frac{\alpha}{k} \sin kl_2 \right].$$

3. 位移节点

$$kx_0 = \begin{cases} kl_2 + \left(kl_3 - \frac{\pi}{2} \right); & \text{当 } kl_3 > \frac{\pi}{2} \text{ 时,} \\ \frac{\pi}{2} - \alpha_2; & \text{当 } kl_3 < \frac{\pi}{2} \text{ 时.} \end{cases} \quad (3.49)$$

4. 放大系数

$$M_\varphi = \left| N \left(\cos kl_2 - \frac{\alpha}{k} \sin kl_2 \right) \frac{1}{\cos kl_3} \right|. \quad (3.50)$$

5. 形状因数

$$\text{当 } kl_2 + \alpha_2 < \frac{\pi}{2} \text{ 时, } kl_3 > \frac{\pi}{2}; \quad \varphi = 1,$$

$$\text{而 } kx_M = kl_2 + kl_3 - \frac{\pi}{2}.$$

当 $kl_2 + \alpha_2 > \frac{\pi}{2}$ 时, 根据式 3.16 若圆锥形段没有应变极大点, 则 $kx_M = kl_2$, $\varphi = \frac{1}{\sin kl_3}$,

若有极大点,则

$$\varphi = \left| \frac{2\alpha}{k} \frac{a_2}{a_1} \sec(kx_M + \alpha_2) \right|. \quad (3.51)$$

此时 x_M 由式 3.17 求得.

6. 输入力阻抗

其中

$$\left. \begin{aligned} Z_i &= -jZ_0 \operatorname{tg} \alpha_1, \\ \operatorname{tg} \alpha_1 &= \operatorname{tg} \alpha_2 - \frac{\alpha}{k}, \\ \operatorname{tg}(kl_2 + \alpha_1) &= -\operatorname{tg} kl_3 + \frac{Na}{k}. \end{aligned} \right\} \quad (3.52)$$

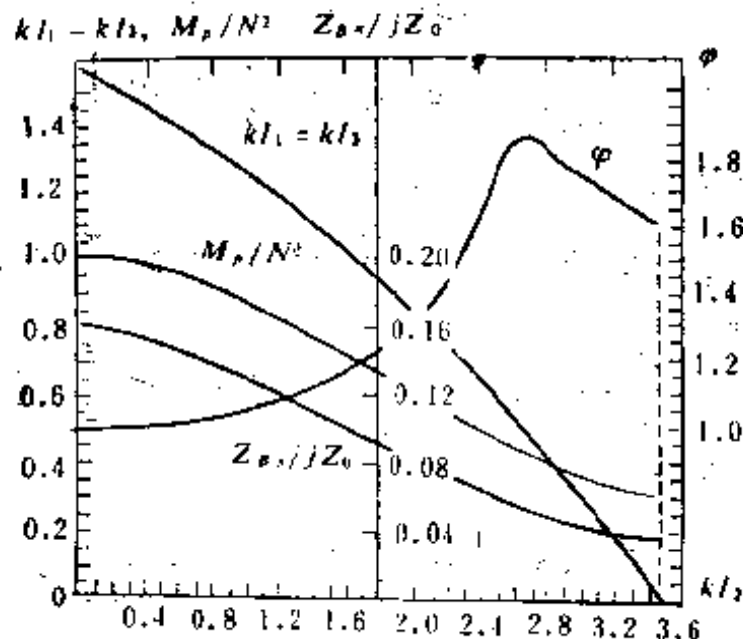
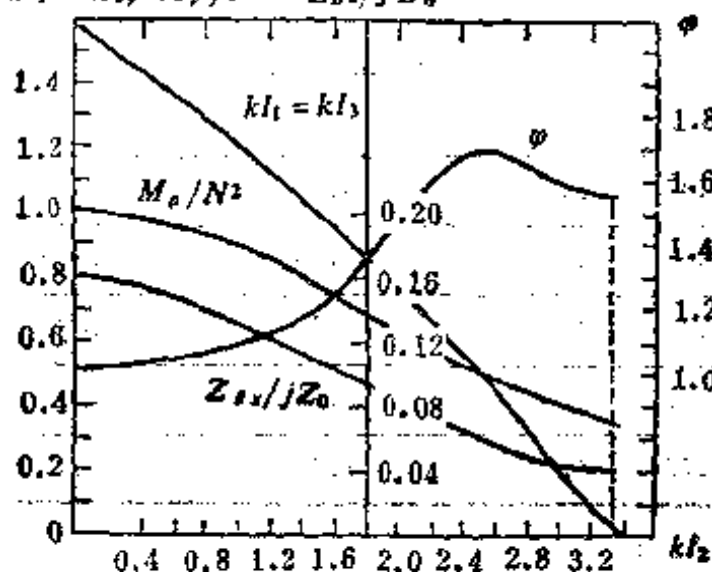


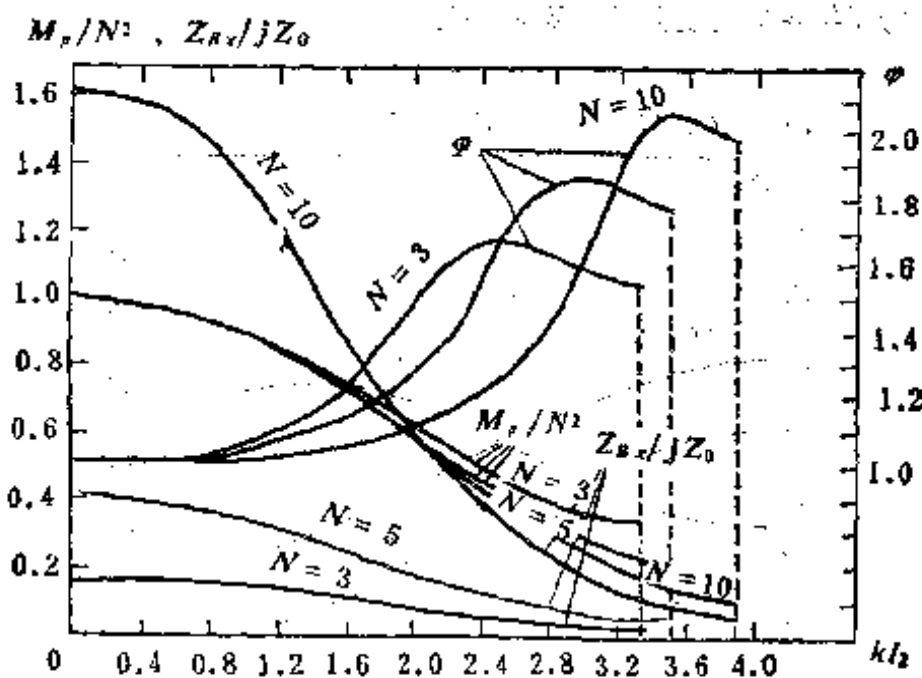
图3.11 带有圆锥形过渡段的阶梯型聚能器各参量与 kl_2 的关系曲线 ($N=3$)

图 3.11 到 3.16 分别给出了前面讨论过的几种复合变幅杆当 $N=3$ 时(图 3.12(b) 中还给出 $N=5, 10$ 的情况)各参量与 kl_2 的关系, 可以看出, 上述各种情况都存在 φ 的最大值. 为进行比较, 表 3.9 列出在相同的面积系数 $N(N=3)$

$$kl_1 = kl_2, M_r/N^2 = Z_{Bz}/jZ_0$$



(a) 带有指数曲线型过渡段的阶梯型聚能器各参量与 kl_2 的关系曲线 ($N=3$)



(b) $N=3, 5, 10$ 时带有指数曲线形过渡段的阶梯型聚能器各参量与 kl_2 的关系

图 3.12

时,五种复合变幅杆各参量的数值。表中 $(kl_2)_M$ 相应于出现 $\varphi_{\max}$ 的数值, Z_i/jZ_0 为频率高于谐振频率 1% 时的相对输

表 3.9 $N=3$ 时 5 种变幅杆的参量

参 量 类 型	φ_{max}	$(kl_2)_M$	$kl_1 + kl_2 + kl_3$	M_p/N^2	Z_{in}/jZ_0 %
1	1.87	2.6	3.68	0.433	5.6
2	1.68	2.6	3.43	0.460	5.5
3	1.42	2.8	3.10	0.430	4.4
4	2.03	1.8	4.16	0.253	3.9
5	1.77	3.0	3.53	0.249	4.3

表中变幅杆类型

- (1) 为具有圆锥形过渡段的阶梯型变幅杆；
- (2) 具有指数形过渡段的阶梯型变幅杆；
- (3) 具有悬链线形过渡段的阶梯型变幅杆；
- (4) $kl_3 = 0$ 的复合悬链线形变幅杆；
- (5) $kl_1 = 0$ 的复合圆锥形变幅杆。

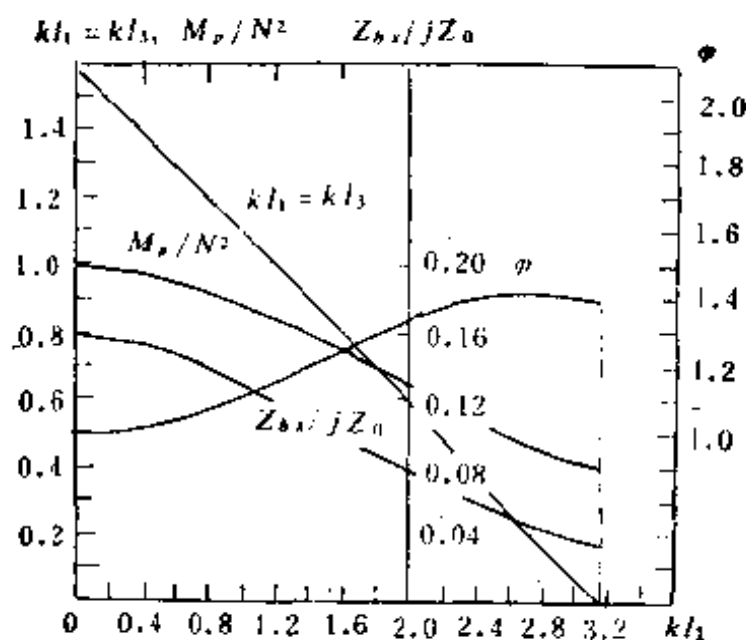


图 3.13 带有悬链线形过渡段的阶梯型聚能器
各参量与 kl_2 的关系曲线 ($N=3$)

入阻抗值。

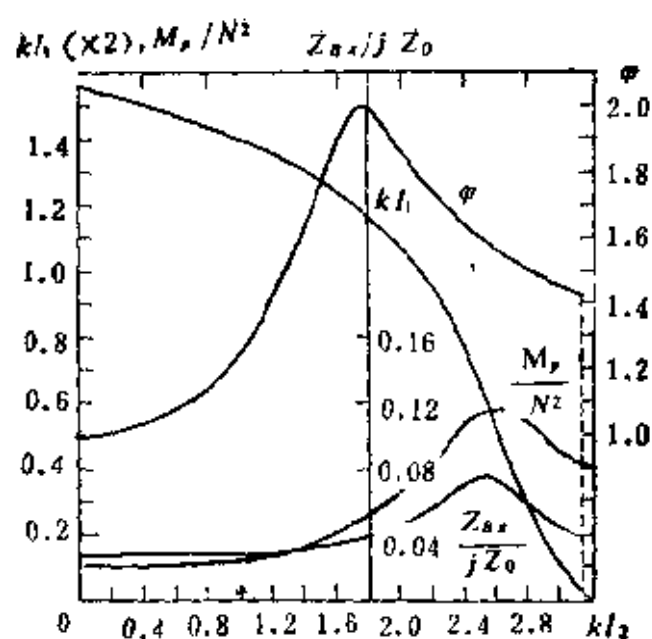


图 3.14 $kl_1 = 0$ 的组合悬链线形聚能器的各参量与 kl_2 的关系曲线 ($N=3$)

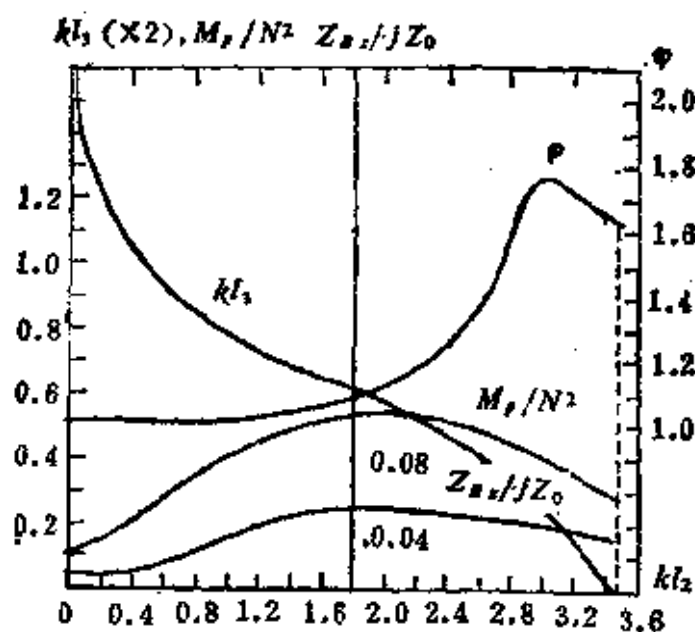


图 3.15 $kl_1 = 0$ 的组合圆锥形聚能器各参量与 kl_2 的关系曲线 ($N=3$)

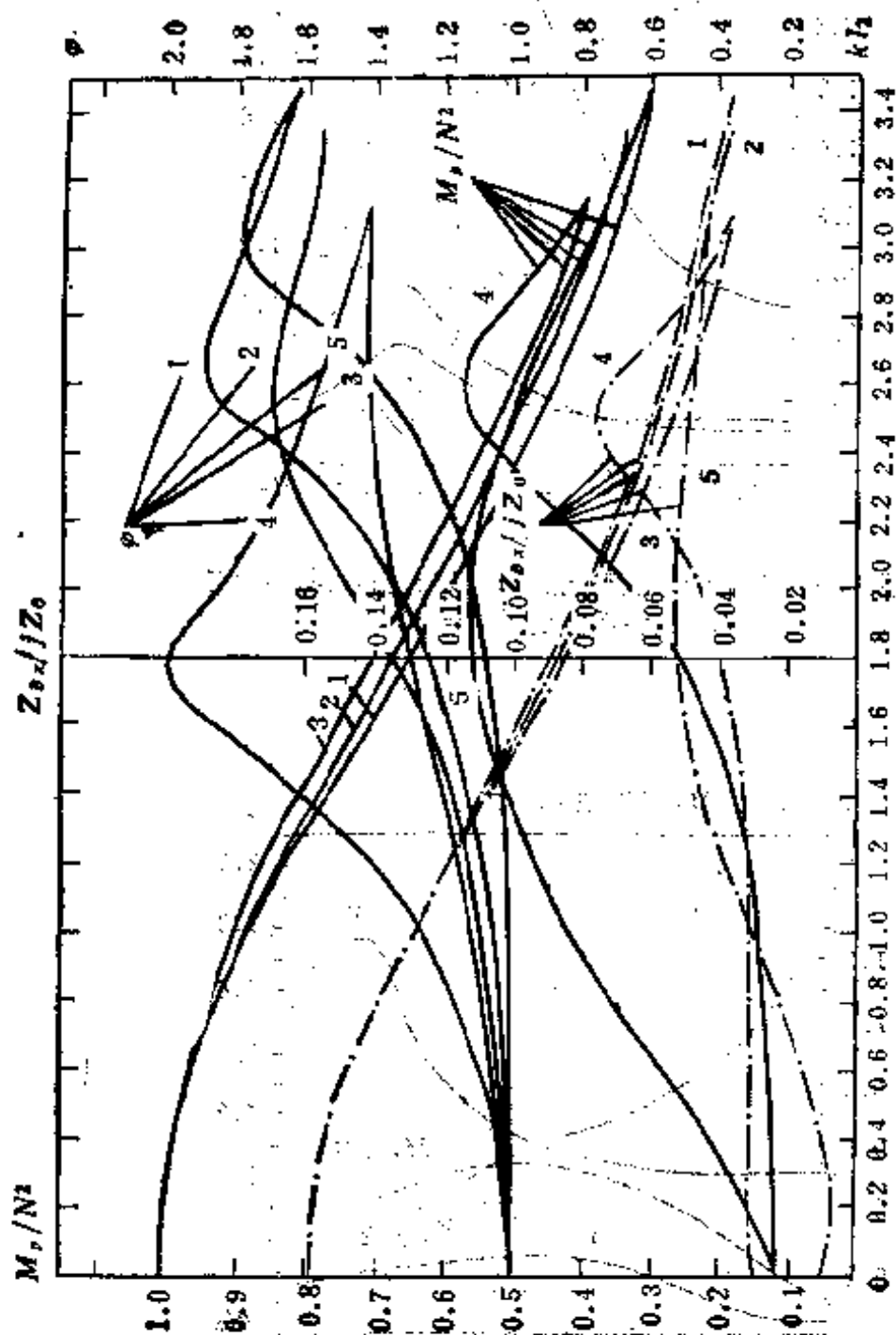


图 3.16 $N = 3$ 时几种不同类型的聚能器(变速杆)各参数与 kl_2 的关系

- | | | | | |
|---|----|----------------------|------------|---------------------------|
| 1 | 带有 | { 圆锥形
指数形
悬链线形 | 过渡段的阶梯形变速杆 | 4—— $kl_3 = 0$ 的组合悬链线形变速杆 |
| 2 | | | | 5—— $kl_3 = 0$ 的组合圆锥形变速杆 |
| 3 | | | | |

§ 3.4 倒锥形复合变幅杆

当换能器向液体介质辐射声波时,在某些应用场合,为提高辐射声能,时常采用加大辐射面积来改善换能器与辐射介质之间的阻抗匹配。图 3.17 就是考虑上述情况的一种设计,它由一段四分之一波长的平直杆和四分之一波长的圆锥组合而成的半波共振变幅杆。

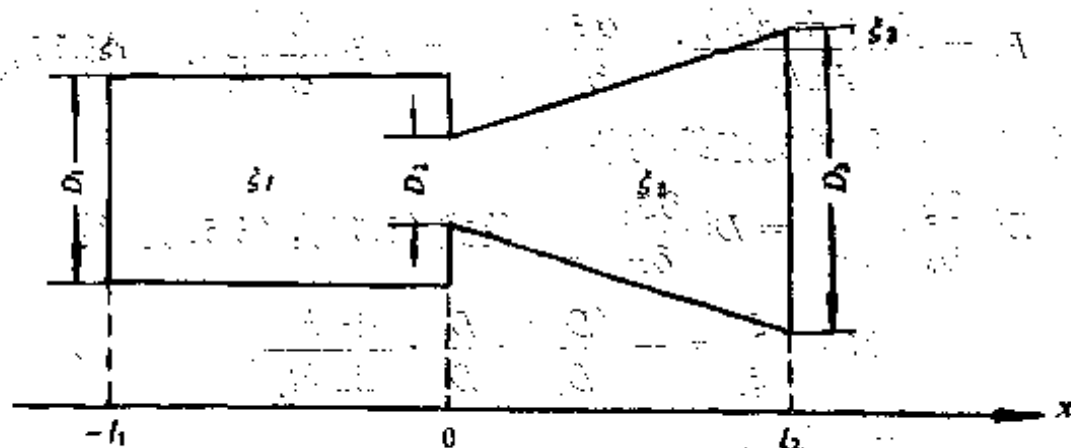


图 3.17 倒锥形复合变幅杆

1. 频率方程 平直杆部分的位移可写成

$$\xi_1 = A_1 \cos kx + A_2 \sin kx \quad -l_1 \leq x \leq 0. \quad (3.53)$$

圆锥形一般的截面积与坐标的函数关系改写为

$$S = S_2(1 + \alpha'x)^2 \quad \text{或} \quad D = D_2(1 + \alpha'x),$$

$$\alpha' = \frac{D_1 - D_2}{D_2 l_2},$$

$$\xi_{II} = \frac{1}{1 + \alpha'x} (B_1 \cos kx + B_2 \sin kx), \quad 0 \leq x \leq l_2. \quad (3.54)$$

四分之一波长的圆锥杆的频率公式在式(2.62)给出,所以这种复合变幅杆的频率公式为

$$\left. \begin{aligned} kl_1 &= \frac{\pi}{2}, \\ \frac{\lg kl_2}{kl_2} &= \frac{D_3}{D_3 - D_2} \end{aligned} \right\} \quad (3.55)$$

2. 放大系数 M_p 由式 (3.53) 及边界条件 $\xi_1|_{x=0} = 0$ 和 $\xi_1|_{x=-l_1} = \xi_1$, 得

$$A_9 = -\frac{\xi_1}{\sin kl_1}; \quad \left. \frac{\partial \xi_1}{\partial x} \right|_{x=0} = -k \frac{\xi_1}{\sin kl_1}, \quad (3.56)$$

由式 (3.54) 及边界条件 $\xi_{11}|_{x=0} = 0$; $\xi_{11}|_{x=-l_1} = \xi_1$, 得

$$B_8 = \frac{\xi_2(1 + \alpha' l_2)}{\sin kl_2}; \quad \left. \frac{\partial \xi_{11}}{\partial x} \right|_{x=0} = k \xi_2 \frac{D_3/D_2}{\sin kl_2}. \quad (3.57)$$

利用在 $x = 0$ 处力连续的条件

$$D_1^2 \left. \frac{\partial \xi_1}{\partial x} \right|_{x=0} = D_2^2 \left. \frac{\partial \xi_{11}}{\partial x} \right|_{x=0} \text{ 及式 (3.56), (3.57), 得}$$

$$M = \frac{\xi_2}{\xi_1} = - \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^2 \cdot \frac{D_3}{D_2} \cdot \frac{\sin kl_2}{\sin kl_1}.$$

因为 $kl_1 = \frac{\pi}{2}$, 所以

$$M_p = \left| \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^2 \cdot \frac{D_3}{D_2} \sin kl_2 \right|. \quad (3.58)$$

其中 kl_2 由式 (3.55) 求得.

3. 位移节点 节点在 $x = 0$ 处

4. 输入力阻抗

由式 (3.53) 及边界条件 $\xi_1|_{x=-l_1} = \xi_1$, 得

$$A_7 = \frac{\xi_1}{\cos kl_1} + A_8 \lg kl_1. \quad (3.59)$$

由条件 $F_1 = -S_1 E \left. \frac{\partial \xi_1}{\partial x} \right|_{x=-l_1}$ 及式 (3.59), 得

$$F_1 = -S_1 E k \left(\xi_1 \lg kl_1 + A_8 \frac{1}{\cos kl_1} \right). \quad (3.60)$$

由式(3.54)及边界条件 $\left. \frac{\partial \xi_{II}}{\partial x} \right|_{x=l_2} = 0$, 得

$$B_8 = \frac{k(1 + \alpha' l_2) \sin k l_2 + \alpha' \cos k l_2}{k(1 + \alpha' l_2) \cos k l_2 - \alpha' \sin k l_2} \cdot B_7. \quad (3.61)$$

由力连续条件 $D_1^2 \left. \frac{\partial \xi_I}{\partial x} \right|_{x=0} = D_2^2 \left. \frac{\partial \xi_{II}}{\partial x} \right|_{x=0}$ 及位移连续条件 $\xi_I|_{x=0} = \xi_{II}|_{x=0}$, 得

$$A_8 = \frac{1}{N^2} \left(-\frac{\alpha'}{k} B_7 + B_8 \right), \quad (3.62)$$

$$A_7 = B_7. \quad (3.63)$$

综合式(3.61), (3.62), (3.63)及(3.59), 经整理后得到输入阻抗 Z_i 为

$$\frac{Z_i}{Z_{01}} = j \left[\operatorname{tg} k l_1 + \frac{W}{N^2 \cos^2 k l_1 - \sin k l_1 \cos k l_1 (W)} \right], \quad (3.64)$$

其中

$$W = \frac{(k^2 + k^2 \alpha' l_2 - \alpha'^2) \operatorname{tg} k l_2 - k \alpha'^2 \cdot l_2}{k^2 (1 + \alpha' l_2) + \alpha' k \operatorname{tg} k l_2}.$$

§ 3.5 高斯形变幅杆

前面讨论变幅杆的形状因数 φ 时已经指出, 在上述各种变幅杆中输出端的振动速度与杆中的最大应力 $\sigma_{\max}$ 成正比. 变幅杆输出端所能达到的振动速度常常受变幅杆材料所能承受的应力, 即疲劳强度所限制. 因此, 如果有一种变幅杆, 其应力沿杆的轴向分布是均匀的(与坐标 x 无关), 即没有极大值存在, 那么, 这种变幅杆由于 φ 值提高, 就有可能在输出端得到很大的振动速度. 根据恒应变(或应力)的特定要求, 我们可以求出相应的截面变化规律, 即变幅杆的外形. 变截面波动方程(2.2)可改写成

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} (\ln S) \frac{\partial \xi}{\partial x} + k^2 \xi = 0, \quad (3.65)$$

要求应变与 x 无关, 即

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\xi_l}{l} e^{i\omega t}, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0, \quad \xi = \frac{\xi_l}{l} x e^{i\omega t},$$

ξ_l 为 $x = l$ 时的质点位移. 式 (3.65) 可简化为

$$\frac{\partial}{\partial x} (\ln S) = -k^2 x,$$

求积分得

$$S = e^{-\frac{1}{2}(kx)^2 + c}.$$

C 为积分常数, 由边界条件确定. 在 $x = 0$ 处令 $S = S_0$, 则由上式可定出 $S_0 = e^c$, 这样, 我们可以得到所需的变幅杆截面变化规律

$$S = S_0 e^{-\frac{1}{2}(kx)^2} = S_0 e^{-\frac{1}{2}\phi^2}, \quad (3.66)$$

其中 $\phi = kx$, S_0 是节点处截面积. 当变幅杆是圆形截面时, 其直径的变化规律为

$$D = D_0 e^{-\frac{1}{4}\phi^2}, \quad (3.67)$$

其外形变化为高斯“钟形曲线”, 如图 3.18 所示. 完整的外形是 $\phi = \pm \infty$, 即曲线在 x 较大的情况时很尖锐而趋近于零.

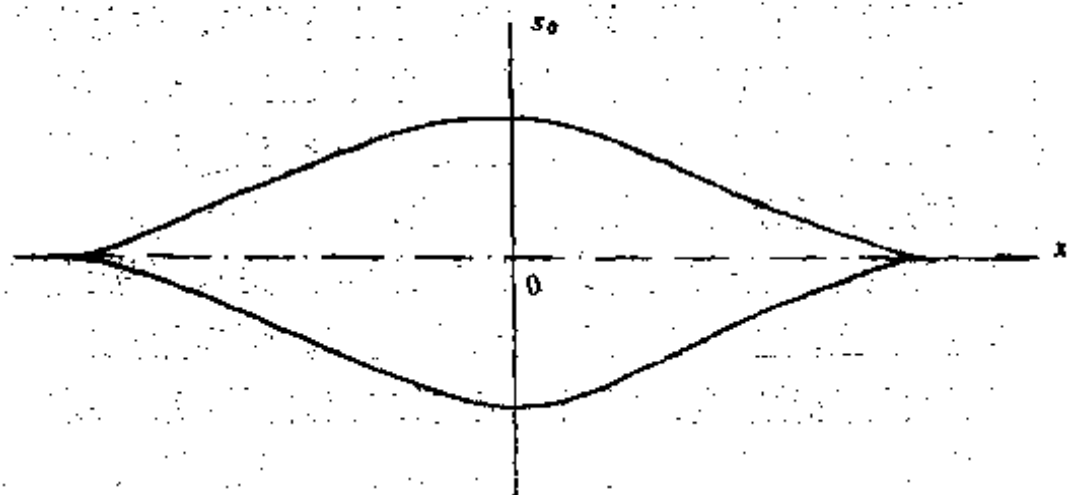


图 3.18 高斯“钟形”曲线

在实际应用中,常常要求输出端要有一定的截面积,而不是很尖锐。为此,可以采用“代替法”来解决。如图 3.19,在会聚端适当的截面截去一段,而代之以均匀短棒或其他形状的短棒。为保持应力分布不变,且应力为常数。代替部份所呈现的机械阻抗必须与被截去部分的机械阻抗相等。由此可以得到如图 3.19 均匀棒取代体的长度 l_3 。

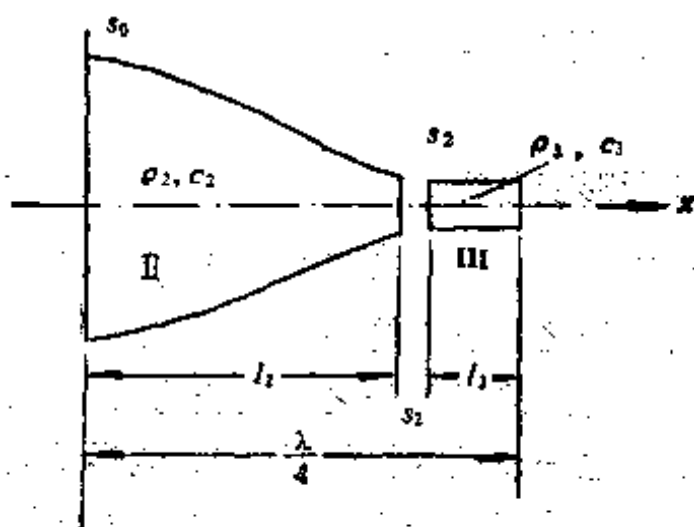


图 3.19

$$\phi_3 = k_3 l_3 = \operatorname{arccctg} \left(\frac{\rho_3 c_3}{\rho_2 c_2} \cdot \phi_2 \right), \quad (3.68)$$

其中

$$\phi_2 = k_2 l_2; \quad k_2 = \omega / c_2.$$

如果所用的材料相同,则上式简化为

$$\phi_3 = \operatorname{arccctg} \phi_2. \quad (3.69)$$

3.5.1 端接圆柱的四分之一波长高斯杆的长度

由图 3.19 及式 3.66 我们可以得到段 II 的长度 l_2 为

$$\phi_2 = k_2 l_2 = \left(2 \ln \frac{S_0}{S_2} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.70)$$

因此端接圆柱的四分之一波长的高斯形变幅杆的长度 l 为

$$l = l_1 + l_3 = \frac{1}{k_3} \left(2 \ln \frac{S_0}{S_2} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{k_3} \arccotg \left[\frac{\rho_3 c_3}{\rho_2 c_2} \left(2 \ln \frac{S_0}{S_2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]. \quad (3.71)$$

当用同一材料时,上式简化为

$$l_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{k} \left[\left(2 \ln \frac{S_0}{S_2} \right)^{\frac{1}{2}} + \arccotg \left(2 \ln \frac{S_0}{S_2} \right)^{\frac{1}{2}} \right], \quad (3.72)$$

其中 $k = \frac{\omega}{c}$, c 是细杆中材料的纵波速度.

3.5.2 复合高斯形变幅杆

实际应用的变幅杆并不是图 3.18 所示的形状,而是在高振幅的一端用四分之一波长的高斯杆,以避免应力分布不均匀.在低振幅端可以采用四分之一波长的圆柱杆或为提高放大系数采用四分之一波长的指数形(或其他形状)杆,在波节处与四分之一波长的高斯杆连接而组成半波长的复合变幅杆.其完整的外形如图 3.20(a) 所示.在连接处(波节面)的截面 S_{01} 可以取等于 S_{02} ,也可以取大于 S_{02} ,但是一般取 $S_{01} = S_{02}$.以避免应力集中.图 3.20(b) 是其应力分布图.如图 3.20(a),当段 I 是圆柱时,其放大系数为

$$M_p = \frac{\xi_3}{\xi_1} = \frac{\rho_1 C_1 S_{01}}{\rho_2 C_2 S_{02}} \left[\left(\frac{\rho_2 C_2}{\rho_3 C_3} \right)^2 + 2 \ln \frac{S_{02}}{S_3} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.73)$$

当三段用同一种材料时,

$$M_p = \frac{S_{01}}{S_{02}} \left(1 + 2 \ln \frac{S_{02}}{S_3} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.74)$$

如果节点两边的截面积相等,即 $S_{01} = S_{02}$ 则上式简化为

$$M_p = \left(1 + 2 \ln \frac{S_{02}}{S_3} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.75)$$

低振幅端四分之一波长杆的长度按照所选择的形状计

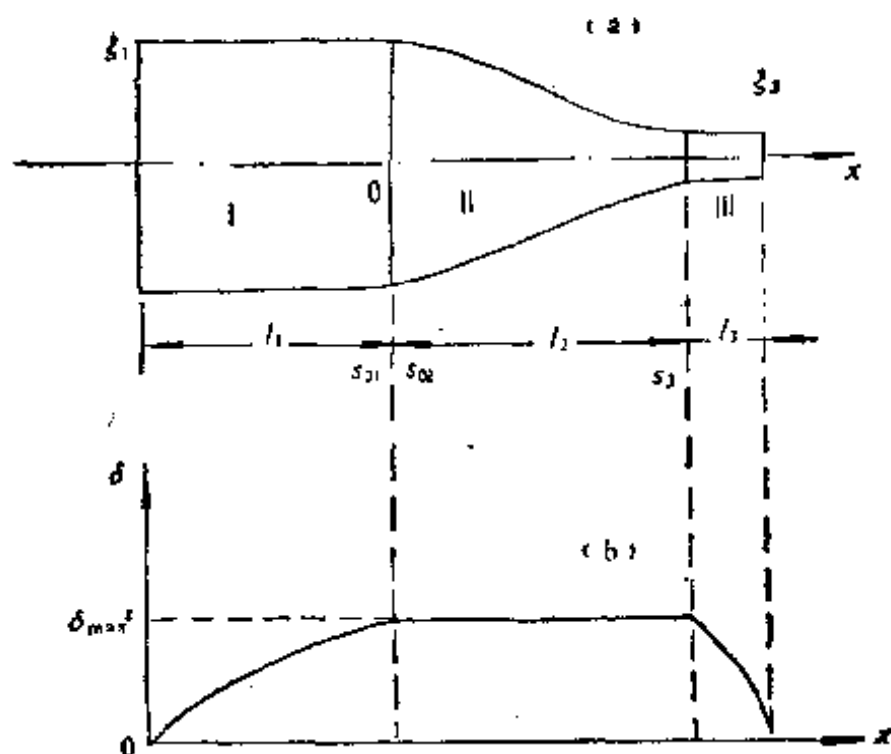


图 3.20 复合高斯形变幅杆及其应力分布

算。

$$\left. \begin{aligned}
 l_1 &= \frac{C}{4f} && \text{(圆柱时),} \\
 l_1 &\text{由式 (2.25) 计算 (指数杆时),} \\
 l_1 &\text{由式 (2.62) 计算 (圆锥形杆时),} \\
 l_1 &\text{由式 (2.43) 计算 (悬链线形杆时).}
 \end{aligned} \right\}$$

以上的计算方法虽然比较简单，但是在连接处，截面变化不是平滑的。因此，应力集中问题仍然不能完全避免。也就是说，形状因数 φ 的实际数值要比理论值低。

Eisner 和 Seager^[14] 曾由波动方程出发，在给定的边界条件下用比较严格的分析方法得到端接部分及低振幅段截面变化的表达式。给出形状因数 φ ，放大系数 M_p 及变幅杆的直径比之间的关系。指出，在理论上 φ 值不受限制，但实用上由于直径比受限制，所以 φ 值实际上只能达到 5。（指数形变幅杆理论极限为 $\varphi = 2.7$ ）其分析方法可以进行双参量设计，即

φ 及 M 可单独选择。但是计算比较复杂，为此曾用计算机算出一些设计图表。

§ 3.6 傅里叶形变幅杆

前面讨论了适合于高振幅状态下工作的高斯型复合变幅杆。这种变幅杆由于放大系数不大，常常需要大的振动速度推动。作为高斯型变幅杆的推动器不但要求放大系数大，同时还要求有较大的 φ 值和弯曲劲度。前面我们所讨论的具有过渡段阶梯形的变幅杆就是为了这个目的。除此以外，Eisner^[16] 还研究了一种“傅里叶”型变幅杆。这种变幅杆的性能介于简单指数形和简单阶梯形之间。他从变截面波动方程出发，规定了特定的性能以求得所需要的变幅杆外形。他曾计算了三阶及四阶傅里叶型两种变幅杆。当放大系数 $M < 50$ 时，两种变幅杆的性能差不多；当 M 较大时，如 $M = 200$ ，差别就比较大。此时四阶比三阶傅里叶型变幅杆的弯曲劲度大两倍。从兼顾 φ 值及弯曲劲度的角度考虑，傅里叶型变幅杆要比简单的阶梯形或指数形好。例如 $M = 100$ 时傅里叶型的 φ 值为 1.6，约为简单阶梯形的两倍，而略小于简单指数形（约为其 $3/4$ ）。但弯曲劲度比简单指数形大 130 倍，而比简单阶梯形小 2.6 倍。

傅里叶型变幅杆与前面讨论的五种复合变幅杆的性能比较列于表 3.10, 3.11, 3.12。可以看出，当 $N(N = 3)$ 较小时，具有指数形过渡段的阶梯形变幅杆比较好。（虽然过渡段为圆锥形的 φ 值理论上较大，但由于截面变化不平滑，实际 φ 值不会比指数形过渡段的阶梯形变幅杆好）当放大系数 M 较大（ $N \approx 10, M < 40$ ）时，则具有悬链线形过渡段的阶梯形变幅杆的 φ 值较大。当 $M > 40$ 时采用傅里叶形变幅杆较合适。

表 3.10 6种变幅杆的参数

 $N = 3$

参 量 变幅杆类型	φ	Z_1/Z_m %	kl_2	$kl_1 + kl_2 + kl_3$
1	1.84	5.7	2.55	3.68
2	1.67	5.3	2.67	3.42
3	1.42	4.5	2.83	3.13
4	1.70	4.4	2.98	3.06
5	1.56	4.5	2.78	3.14
6	1.69	/	3.96	3.96

表 3.11

 $N = 5$

变幅杆类型	1	2	3	4	5	6
φ	1.55	1.73	1.51	1.70	/	1.64

表 3.12

 $N = 10$

变幅杆类型	1	2	3	4	5	6
φ	1.10	1.28	1.48	/	/	1.60

注：变幅杆类型编号见表 3.9，编号 6 代表傅里叶形变幅杆

第二章 单一变幅杆的理论和设计

§ 2.1 引言

在功率超声加工处理的设备中,我们一般将由换能器、变幅杆(包括传振杆)以及加工工具等所组成的系统称为超声振动系统。例如在超声加工的设备中,超声振动系统一般由超声换能器,传振杆,变幅杆及加工工具组成,如图 2.1 所示。

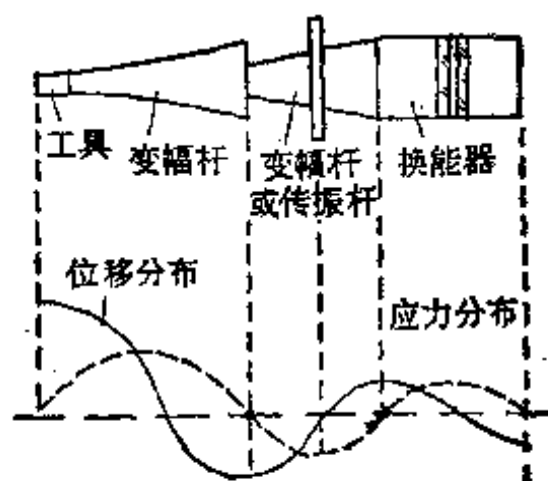


图 2.1 超声振动系统

超声变幅杆,又称超声变速杆、超声聚能器。在超声技术中,特别在高声强超声设备的振动系统中是很重要。它的主要作用是把机械振动的质点位移或速度放大,或者将超声能量集中在较小的面积上,即聚能作用。我们知道,超声换能器辐射面的振动幅度在 20kHz 范围内只有几微米。而在高声强超声应用中,如超声加工、超声焊接、超声搪锡、超声破坏细胞、超声金属成型(包括超声冷拔管、丝和铆接等)和某些超声

外科设备及超声疲劳试验等应用中,辐射面的振动幅度一般需要几十到几百微米。因此必须在换能器的端面连接超声变幅杆,将机械振动振幅放大。除此以外,超声变幅杆还可以作为机械阻抗变换器,在换能器和声负载之间进行阻抗匹配,使超声能量更有效地从换能器向负载传输。

超声变幅杆的性能可以用许多参量来描述。在实际应用中最常用的是:共振频率(共振长度),放大系数,形状因数,输入力阻抗和弯曲劲度等等。放大系数 M ,是指变幅杆工作在共振频率时输出端与输入端的质点位移或速度振幅的比值;形状因数 φ 是衡量变幅杆所能达到最大振动速度的指标之一,它仅与变幅杆的几何形状有关, φ 值越大,所能达到的最大振动速度也越大;输入力阻抗 Z ,定义为输入端策动力与质点振动速度的复数比值。在实际应用中常常要求输入力阻抗随频率及负荷的变化要小;弯曲劲度是弯曲柔顺性的倒数。变幅杆越长,弯曲柔顺性越大,在许多实际应用中这是需要避免的。弯曲劲度也与变幅杆的几何形状有关。

在功率超声的应用中,人们根据实际需要研究出各种类型的变幅杆。最简单、也是较常用的变幅杆有:指数形、悬链线形、阶梯形和圆锥形变幅杆。这类变幅杆我们称为单一变幅杆。此外,为改善变幅杆的某些性能,如提高形状因数,增加放大系数等,还研究出各种组合型变幅杆,这类变幅杆由两种以上不同形状的杆组合而成。在实际应用中还出现一些由多个单一变幅杆级联工作的组合系统,这是另一类问题。

除了上面提到的变幅杆外,在某些应用中有时还需要一些非杆状的振动振幅变换器,其形状有盘形,长方体等,我们称其为变幅器。有些变幅器不但有振动振幅的变换功能,而且还有振动方向的变换功能。

本章讨论几种常用的单一变幅杆,在以后几章中讨论复

合变幅杆,有负载时的变幅杆和变幅器等。

§ 2.2 变截面杆纵振动的波动方程

考虑由均匀、各向同性材料所构成的变截面杆,不计及机械损耗,并设平面纵波沿杆轴向传播,即在杆的横截面上应力分布是均匀的(在杆的横截面尺寸远小于波长时,这种假设是允许的)。

图 2.2 为一变截面杆,其对称轴为坐标轴 x , 作用在小体

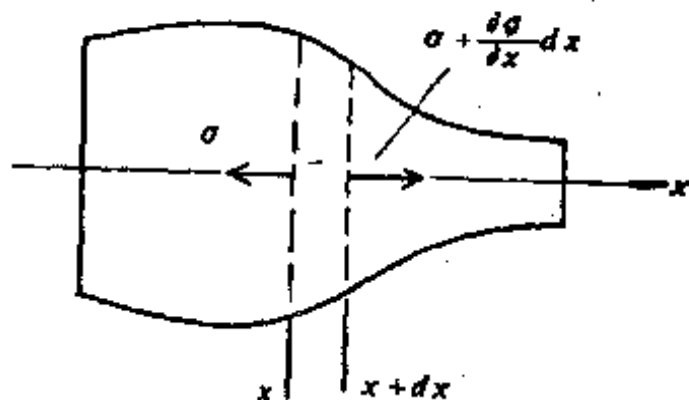


图 2.2 变截面杆的纵振动

元 ($x, x + dx$ 所限定的区间) 上的张应力为 $\frac{\partial \sigma}{\partial x} dx$, 根据牛顿定律可以写出动力学方程

$$\frac{\partial(S \cdot \sigma)}{\partial x} dx = S \cdot \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} dx, \quad (2.1)$$

其中, $S = S(x)$ 为杆的横截面积函数, $\xi = \xi(x)$ 为质点位移函数, $\sigma = \sigma(x) = E \frac{\partial \xi}{\partial x}$ 为应力函数, ρ 为杆材料的密度, E 为杨氏模量。

在简谐振动的情况下,式(2.1)可写成

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{1}{S} \cdot \frac{\partial S}{\partial x} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + k^2 \xi = 0. \quad (2.2)$$

上式就是变截面杆纵振动的波动方程。其中 $k^2 = \omega^2/c^2$, k 为圆波数, ω 为圆频率, $c = (E/\rho)^{1/2}$ 为纵波在细棒中的传播速度。

下面将利用式(2.2) 来讨论几种工程上最常用的指数形、圆锥形、悬链线形及阶梯形变幅杆。

§ 2.3 指数形变幅杆

图 2.3 为指数形变幅杆, 坐标原点 $x = 0$ 处的横截面积为 S_1 , $x = l$ 处的横截面积为 S_2 , 其面积函数为

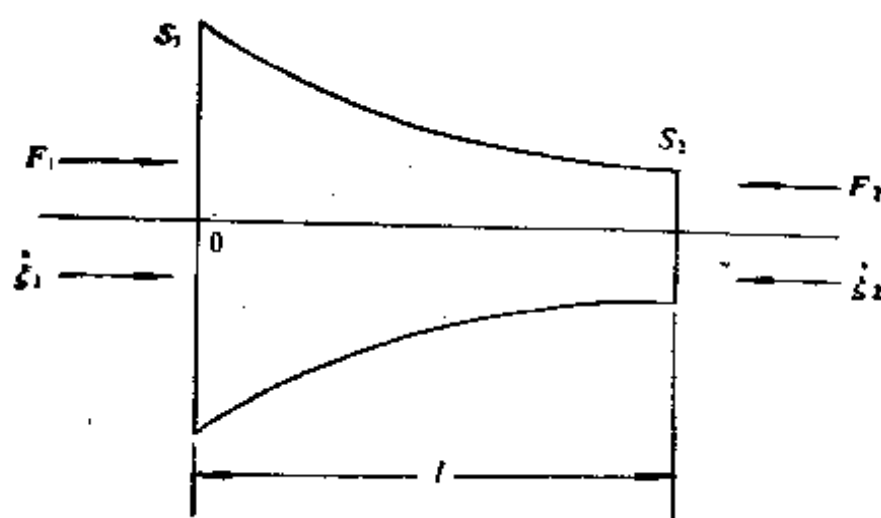


图 2.3 指数形变幅杆

$$S = S_1 e^{-2\beta x},$$

作用在变幅杆输入端 ($x = 0$) 及输出端 ($x = l$ 处) 的力及振动速度分别为 $F_1, \dot{\xi}_1$ 及 $F_2, \dot{\xi}_2$ 。

当指数杆的半径为 R 的圆截面时,

$$R = R_1 e^{-\beta x},$$

其中

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{1}{l} \ln(S_1/S_2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{l} \ln(R_1/R_2) \\ &= \frac{1}{l} \ln N,\end{aligned}$$

$N = (S_1/S_2)^{\frac{1}{2}} = R_1/R_2$ 为面积系数。

此时方程(2.2)的解为

$$\xi = e^{\beta x} (A \cos k'x + B \sin k'x) e^{i\omega t}. \quad (2.3)$$

其中 $k' = (k^2 - \beta^2)^{1/2}$ 。在下面的讨论中时间因子 $e^{i\omega t}$ 都暂时不写,但在求振动速度时必须记住。应变分布的表达式为

$$\begin{aligned}\frac{\partial \xi}{\partial x} &= \beta e^{\beta x} (A \cos k'x + B \sin k'x) \\ &+ e^{\beta x} (-A k' \sin k'x + B k' \cos k'x).\end{aligned} \quad (2.4)$$

边界条件(见图 2.3)为

两端自由时,

$$\left. \begin{aligned}x=0: \quad \xi &= \xi_1, \quad \dot{\xi}_1 = \frac{\partial \xi}{\partial t} \Big|_{x=0}, \\ \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x=0} &= 0, \\ x=l: \quad \xi &= -\xi_2, \quad \dot{\xi}_2 = -\frac{\partial \xi}{\partial t} \Big|_{x=l}, \\ \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x=l} &= 0,\end{aligned} \right\} \quad (2.5a)$$

一般情况时,

$$\left. \begin{aligned}x=0: \quad F_1 &= -S_1 E \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x=0}, \\ x=l: \quad F_2 &= -S_2 E \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x=l},\end{aligned} \right\} \quad (2.5b)$$

下面分别讨论指数形变幅杆的共振频率,放大系数,输入

力阻抗, 形状因数和质点位移分布及等效网络等等。先讨论没有负载时的情况, 有负载的变幅杆将在另一章讨论。

2.3.1 频率方程和谐振长度

由式(2.4)及边界条件(2.5a)的 $\frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0$,

可以得到关系式

$$[1 + (\beta/k')^2] \cdot \sin k'l = 0.$$

由于 $[1 + (\beta/k')^2]$ 不为零, 因此得频率方程为

$$\sin k'l = 0, \quad l = n \frac{\lambda'}{2}, \quad (2.6)$$

因为

$$k' = (k^2 - \beta^2)^{\frac{1}{2}},$$

所以在指数形杆中纵波传播的速度 c' 为

$$c' = \frac{c}{\left[1 - \left(\frac{\beta c}{\omega}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.7)$$

由上式可以看出, 在指数形变幅杆中, 声波传播的速度与圆频率有关, 且只有 $\left(\frac{\beta c}{\omega}\right)^2 < 1$ 时声波才能在指数杆中传播。即

要求工作频率 $f > \frac{\beta c}{2\pi}$ 。此外还可以看到, 在指数形变幅杆中

纵波传播的速度 c' 大于细直杆中的传播速度 c 。

由式(2.6), (2.7)及关系式 $\beta l = \ln N$, 可以得到谐振长度 l

$$\begin{aligned} l &= n \frac{c}{2f} \left[1 + \left(\frac{\ln N}{n\pi}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= n \frac{\lambda}{2} \left[1 + \left(\frac{\ln N}{n\pi}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

以上 $n = 1, 2, 3, \dots, k'$ 和 λ 分别为指数杆及均匀细杆中的波长。

2.3.2 位移节点 x_0

由边界条件(2.5a)及式(2.3), (2.4)可以确定常数 $A = \xi_1$, $B = -\frac{\beta}{k'} \xi_1$ 并代入式(2.3)得到质点位移 ξ 沿轴向的分布为

$$\xi = \xi_1 e^{\beta x} \left(\cos k' x - \frac{\beta}{k'} \sin k' x \right), \quad (2.9)$$

应变或应力分布为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \xi_1 \beta e^{\beta x} & \left\{ \left(\cos k' x - \frac{\beta}{k'} \sin k' x \right) \right. \\ & \left. - \left(\cos k' x + \frac{k'}{\beta} \sin k' x \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

由式(2.9), 当 $x = x_0$ 时, $\xi = 0$ 得位移节点 x_0 为

$$\cot(k' x_0) = \beta/k',$$

或

$$x_0 = \frac{l}{\pi} \arccot \left(\frac{\ln N}{\pi} \right). \quad (2.11)$$

2.3.3 放大系数 M_p

由式(2.9), 当 $x = l$ 时 $\xi = -\xi_1$, 由此得放大系数

$$M_p = \left| \frac{\xi_2}{\xi_1} \right| = e^{\beta l} \left(\cos k' l - \frac{\beta}{k'} \sin k' l \right).$$

由式(2.6)的共振条件, $k' l = \pi$ 代入上式得放大系数 M_p 为

$$M_p = e^{\beta l} = N. \quad (2.12)$$

2.3.4 输入力阻抗 Z_i

现在我们来考察一下输入力阻抗与工作频率的关系。由

式(2.3)并利用边界条件 $x=0$ 时 $\xi=\xi_1$ 得到 $A=\xi_1$; 由式(2.4)及边界条件 $F_1=-S_1 E \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x=0}$, 得到

$$F_1 = -S_1 E (\beta A + k' B), \quad (2.13)$$

而由边界条件 $\frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0$ 得

$$B = \xi_1 \frac{k' - \beta \cot k'l}{\beta + k' \cot k'l},$$

将 A, B 代入式(2.13)得到

$$F_1 = -S_1 E \left[\beta \xi_1 + k' \xi_1 \frac{k' - \beta \cot k'l}{\beta + k' \cot k'l} \right],$$

则输入力阻抗 Z_i 为

$$Z_i = \frac{F_1}{j\omega \xi_1} = -\frac{Z_0}{jk'l} \left[\beta l + k'l \frac{k'l - \beta l \cot k'l}{\beta l + k'l \cot k'l} \right].$$

利用关系式 $k = (k'^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}}$, 则有

$$\frac{Z_i}{Z_0} = j \frac{[(k'l)^2 + (\ln N)^2]^{\frac{1}{2}}}{\ln N + k'l \cot k'l}, \quad (2.14)$$

其中 $Z_0 = S_1 \rho C$

2.3.5 形状因数 φ

我们知道,变幅杆中的最大质点振动速度 $\dot{\xi}_{\max}$ 与杆中的最大应力 $\sigma_{\max}$ 成正比,它满足

$$|\dot{\xi}_{\max}| = \frac{|\sigma_{\max}|}{\rho C} \cdot \varphi, \quad (2.15a)$$

其中 ρC 是变幅杆材料的特性力阻抗, 而 φ 是一无量纲的常数, 决定于杆的几何形状, 所以称为形状因数。从式(2.15a)可以看出: 要得到变幅杆末端尽可能大的质点振动速度或者位移振幅, 除了选择 ρC 小而疲劳强度高的材料之外, 还必须设计适当的形状, 使 φ 值尽可能的大。因此 φ 值也是衡量变

幅杆的重要参量之一。

式(2.15a) 也可改写成

$$\varphi = \frac{k\xi_{\max}}{\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)_{\max}}. \quad (2.15b)$$

下面我们来求指数杆的形状因数 φ 。式(2.10) 经过整理,可以得到应变沿杆的轴向分布表达式

$$\begin{aligned} \frac{\partial\xi}{\partial x} &= -\xi_1 e^{\beta x} \left(\frac{\beta}{k'} + k' \right) \sin k'x \\ &= -\xi_1 e^{\beta x} \cdot \frac{k^2}{k'} \sin k'x, \end{aligned} \quad (2.16)$$

由极值条件 $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial\xi}{\partial x} \right) = 0$ 得到应变极大点方程

$$\operatorname{tg}(k'x_M) = -\frac{k'}{\beta}. \quad (2.17)$$

将式(2.17)代入式(2.16)得应变极大值为

$$\left(\frac{\partial\xi}{\partial x} \right)_{\max} = \xi_1 e^{\beta x_M} \cdot \frac{k^2}{\beta} \cos(k'x_M),$$

而由式(2.9) 得

$$\xi_{\max} = \xi_2 = \xi_1 e^{\beta l} \left(\cos k'l - \frac{\beta}{k'} \sin k'l \right),$$

所以形状因数 φ 为

$$\varphi = \frac{N\beta}{k} \cdot e^{-\beta x_M} \cdot \frac{\cos k'l - \frac{\beta}{k'} \sin k'l}{\cos(k'x_M)},$$

或

$$\varphi = \frac{Nk'}{k} \cdot e^{-\beta x_M} \cdot \frac{1}{\sin(k'x_M)}, \quad (2.18)$$

其中 x_M 由式(2.17)求得。

2.3.6 等效网络

考虑一维纵振动时,变幅杆类似于电传输线,也可以用等效网络来描述其工作状态。只要找出两端面的力和速度的关系,就可以给出其等效网络。

由边界条件 $\dot{\xi}_1 = \frac{\partial \xi}{\partial t} \Big|_{x=0}$, $\dot{\xi}_2 = -\frac{\partial \xi}{\partial t} \Big|_{x=l}$, 并利用式(2.3), 我们可以定出常数 A, B ,

$$\left. \begin{aligned} A &= \dot{\xi}_1 / (j\omega) \\ B &= -\frac{\dot{\xi}_1}{j\omega \tan k'l} - \frac{\dot{\xi}_2}{j\omega N \sin k'l}, \\ N &= e^{\beta l} = \sqrt{\frac{S_1}{S_2}}, \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

由边界条件 $F_1 = -ES_1 \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x=0}$ 并利用式(2.4)得

$$F_1 = -ES_1(\beta A + k'B),$$

常数 A, B 由式(2.19)代到上式得

$$F_1 = Z_{01} \frac{k'}{k} \left[\left(\frac{1}{j \tan k'l} - \frac{\beta}{jk'} \right) \dot{\xi}_1 + \frac{1}{jN \sin k'l} \dot{\xi}_2 \right].$$

同样由条件 $F_2 = -S_2 E \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x=l}$ 及式(2.4), (2.19)得

$$F_2 = Z_{02} N \frac{k'}{k} \frac{1}{j \sin k'l} \dot{\xi}_1 + \frac{k'}{k} Z_{02} \left(\frac{\beta}{jk'} + \frac{1}{j \tan k'l} \right) \dot{\xi}_2.$$

综合上述我们可以得到端面力与速度的关系式

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= \left(\frac{k'}{k} \cdot \frac{Z_{01}}{j \tan k'l} - \frac{\beta Z_{01}}{jk'} \right) \dot{\xi}_1 + \frac{k'}{k} \frac{\sqrt{Z_{01} \cdot Z_{02}}}{j \sin k'l} \dot{\xi}_2, \\ F_2 &= \frac{k'}{k} \cdot \frac{\sqrt{Z_{01} \cdot Z_{02}}}{j \sin k'l} \dot{\xi}_1 + \left(\frac{k'}{k} \frac{Z_{02}}{j \tan k'l} + \frac{\beta Z_{02}}{jk'} \right) \dot{\xi}_2, \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

其中

$$Z_{01} = S_1 \rho c, \quad Z_{02} = S_2 \rho c, \quad k' = (k^2 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}, \quad k = \frac{\omega}{c}.$$

由式(2.20)我们可以建立如图(2.4)的等效网络

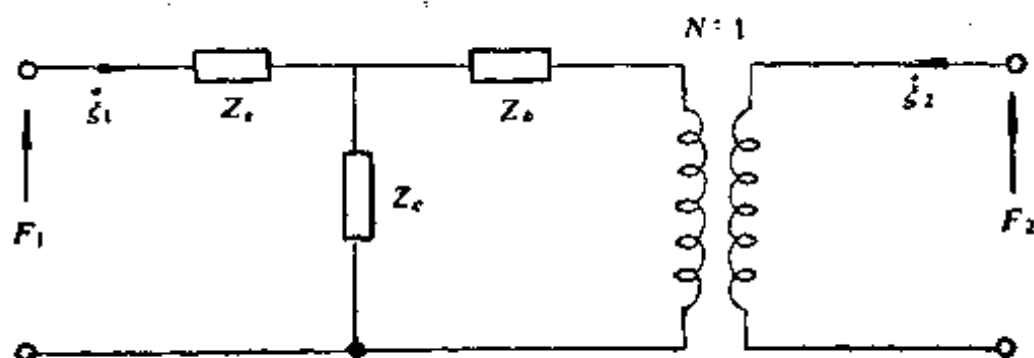


图 2.4 指数形变幅杆的等效网络

其中

$$\left. \begin{aligned} Z_a &= jZ_{01} \left(\frac{k'}{k} \operatorname{tg} \frac{k'l}{2} + \frac{\beta}{k} \right), \\ Z_b &= jZ_{01} \left(\frac{k'}{k} \operatorname{tg} \frac{k'l}{2} - \frac{\beta}{k} \right), \\ Z_c &= \frac{k'}{k} \frac{Z_{01}}{j \sin k'l}, \\ N &= \sqrt{\frac{S_1}{S_2}} = \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}}, \end{aligned} \right\} \quad (2.21a)$$

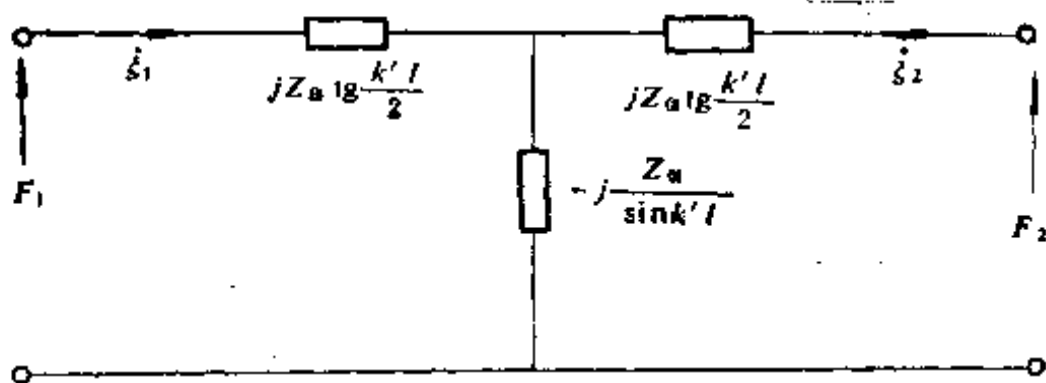


图 2.5 均匀杆的等效网络

这里应该注意的是 $k' \neq k$, 因为指数形杆和均匀截面杆的声速不同。由式(2.21a)可以看出: 当 $N = 1$, $\beta = 0$, $k' = k$ 时, 就成为均匀截面杆的情况, 此时均匀杆的等效网络如图 2.5 所示。

利用关系式

$$k' = (k^2 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}, \quad C' = \frac{C}{\sqrt{1 - \left(\frac{\beta C}{\omega}\right)^2}},$$

$$\frac{k'}{k} = \sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{k}\right)^2} = \frac{C}{C'},$$

式(2.21a)可改写为

$$\left. \begin{aligned} Z_a &= j \frac{C}{C'} Z_{01} \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\omega l}{2 C'} \right) + \frac{\beta C'}{\omega} \right], \\ Z_b &= j \frac{C}{C'} Z_{01} \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\omega l}{2 C'} \right) - \frac{\beta C'}{\omega} \right], \\ Z_c &= -j \frac{C}{C'} Z_{01} \operatorname{csc} \left(\frac{\omega l}{C'} \right). \end{aligned} \right\} \quad (2.21b)$$

如果我们把图 2.4 中变幅杆输出端的质点振动速度 $\dot{\xi}_2$ 的方向改变一下, 则我们可以得到另一等效网络如图 2.6 所示。

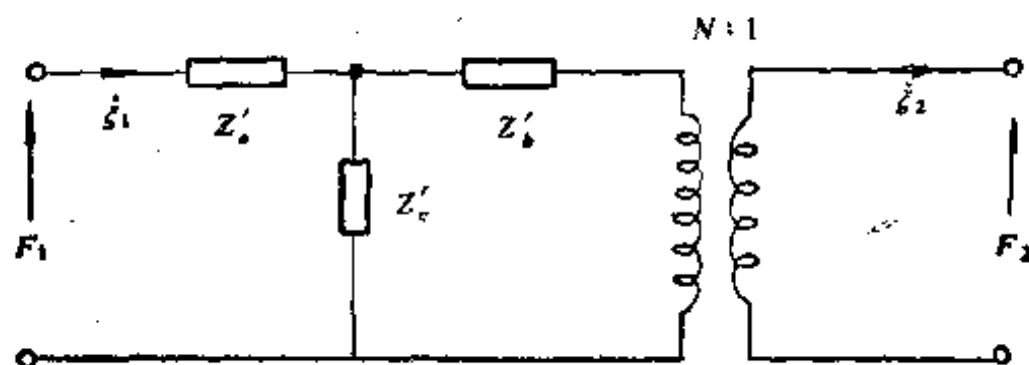
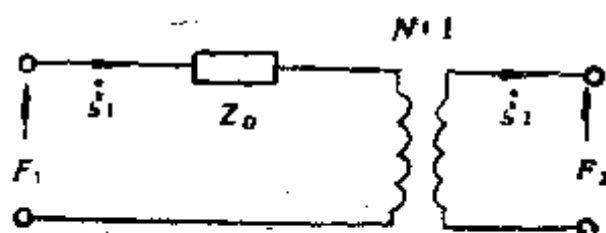


图 2.6

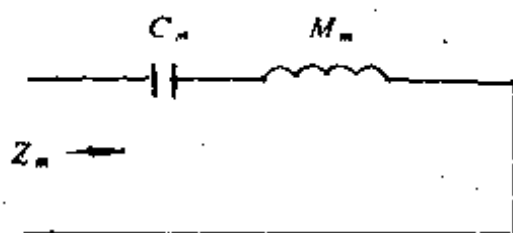
其中

$$\left. \begin{aligned} Z'_a &= -j \frac{C}{C'} Z_{01} \left[\operatorname{ctg} \left(\frac{\omega l}{2C'} \right) - \frac{\beta C'}{\omega} \right], \\ Z'_b &= -j \frac{C}{C'} Z_{01} \left[\operatorname{ctg} \left(\frac{\omega l}{2C'} \right) + \frac{\beta C'}{\omega} \right], \\ Z'_c &= j \frac{C}{C'} Z_{01} \operatorname{csc} \left(\frac{\omega l}{C'} \right). \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

在共振频率附近的等效网络 下面我们求指数形变幅杆在共振频率附近的集中参数等效网络。由于在共振频率附近 $\frac{\omega l}{C'} \rightarrow \pi$ ，所以图 2.6 并联分支阻抗 Z'_c 很大可以忽略。此时图 2.6 可简化为图 2.7(a)。



(a)



(b)

图 2.7 在共振频率附近的等效网络

其中

$$Z_D = Z'_a + Z'_b = -2j \frac{C}{C'} Z_{01} \operatorname{ctg} \left(\frac{\omega l}{2C'} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= -2j \frac{C}{C'} Z_{01} \operatorname{ctg} \left(\frac{\omega C'}{4 C' f_r} \right) \\
&= -2j \frac{C}{C'} Z_{01} \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\omega}{\omega_r} \right) \\
&= 2j \frac{C}{C'} Z_{01} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\Delta \omega}{\omega_r} \right),
\end{aligned}$$

其中 ω_r 为共振圆频率, $\Delta \omega = \omega - \omega_r$, 在共振附近时 $\Delta \omega$ 很小, 所以

$$Z_D \approx j \frac{C}{C'} Z_{01} \cdot \pi \frac{\Delta \omega}{\omega_r}.$$

另一方面, 一串联迴路如图 2.7(b) 所示, 在共振频率附近时可写成

$$\begin{aligned}
Z_m &= j \left(\omega M_m - \frac{1}{\omega C_m} \right) \\
&= j \omega_r M_m \left[\frac{(\omega - \omega_r)(\omega + \omega_r)}{\omega \omega_r} \right] \\
&\approx j 2 \omega_r M_m \frac{\Delta \omega}{\omega_r},
\end{aligned}$$

令 $Z_D = Z_m$ 得

$$\left. \begin{aligned}
M_m &= \frac{S_1 \rho l}{2} \left[1 + \left(\frac{\ln N}{\pi} \right)^2 \right]^{-1}, \\
C_m &= \frac{1}{\omega_r^2 M_m} = \frac{2l}{\pi^2 S_1 E},
\end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

而最后得到指数形变幅杆工作在共振频率附近的等效集中参数网络如图 2.8 所示。 M_m 类比于电路中的电感, 而 C_m 类比于电路中的电容。

$$\text{图中 } N = (S_1/S_2)^{\frac{1}{2}}, \quad M_m = \frac{S_1 \rho C}{2} \left[1 + \left(\frac{\ln N}{\pi} \right)^2 \right]^{-1},$$

$$C_m = \frac{2}{\pi^2} \cdot \frac{l}{S_1 E}.$$

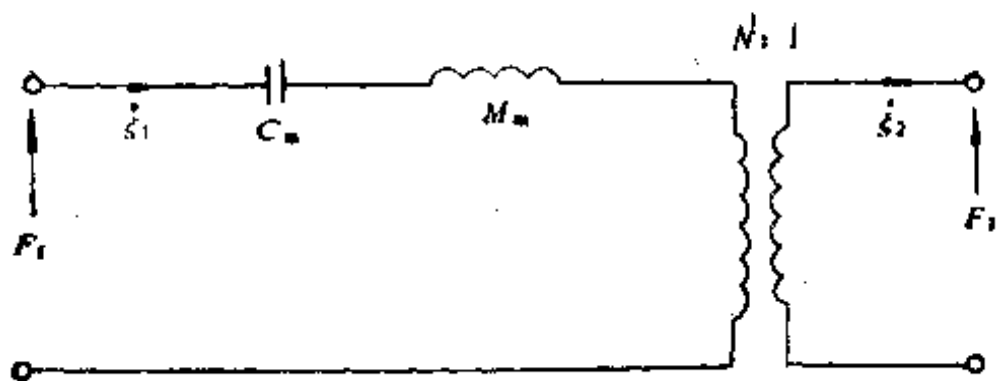


图 2.8 指数形变幅杆在共振频率附近的等效集中参数网络

2.3.7 四分之一波长的指数杆

四分之一波长杆在设计复合变幅杆或组合换能器时也常遇到。质点位移节点的安排有两种情况：一种是位移节点处于变幅杆的宽端，另一种是处于窄端。

四分之一波长的变幅杆由于一端处于波节，即振动位移或速度为零，因而对无损耗时的四分之一波长变幅杆，就其两端振幅比而言，其放大系数 M 为无限大，处于节点一端的输入阻抗 Z_i 也是无限大。实际上材料是有损耗的，而且另一端在实际应用中也有负载，因此， M 及 Z_i 都是有限值。但因有较大的 M 及 Z_i 特性，故在换能器设计中常用它作为阻抗匹配组合，以提高换能器的辐射效率。

1. 位移节点处于宽端的四分之一波长指数杆 此时边界条件为

$$\xi|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0,$$

(参考图 2.3)

由式(2.3)得

$$\xi|_{x=0} = A = 0; \quad \xi = e^{bx} \cdot B \sin k'x,$$

由式(2.4)

$$\left. \frac{\partial \xi}{\partial x} \right|_{x=l} = 0 = \beta e^{\beta l} \cdot B \cdot \sin k'l + e^{\beta l} \cdot k' B \cdot \cos k'l,$$

得频率方程

$$\operatorname{tg} k'l = -k'/\beta,$$

或

$$(k'l) \operatorname{ctg}(k'l) = -\ln N. \quad (2.24)$$

2. 位移节点处于窄端的四分之一波长指数杆

此时边界条件为

$$\xi|_{x=l} = 0, \quad \left. \frac{\partial \xi}{\partial x} \right|_{x=0} = 0,$$

由式(2.3), (2.4)有

$$\xi|_{x=l} = 0 = e^{\beta l} (A \cos k'l + B \sin k'l),$$

得

$$A = -B \operatorname{tg} k'l,$$

$$\left. \frac{\partial \xi}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 = \beta A + Bk',$$

得频率方程

$$\operatorname{tg} k'l = \frac{k'}{\beta},$$

或

$$(k'l) \operatorname{ctg}(k'l) = \ln N. \quad (2.25)$$

2.3.8 计算例举

1. 半波长圆截面指数杆 在高声强超声处理应用中, 例如: 超声加工、超声焊接, 超声搪锡, 超声冷拔丝、管, 超声乳化、粉碎及超声疲劳试验等等, 由于换能器端面的振动幅度一般很小(几微米), 所以必须采用超声变幅杆, 把振动振幅放大, 以达到所需的强度。变幅杆宽端的大小取决于换能器幅

射面积。一般说其截面线度取等于或略大于换能器辐射面的线度。但其横向尺寸在没有采取特殊措施的情况下，应小于四分之一波长，以减少横向振动所带来的影响。而窄端（即输出端）大小应根据所处理的对象来选择。

设已知工作频率为 20kHz，变幅杆所用材料为 45 号钢，其纵波在细棒中的声速 $C_L = 5.2 \times 10^6 \text{ mm/s}$ ，宽端直径 $D_1 = 52 \text{ mm}$ ，窄端直径为 $D_2 = 16 \text{ mm}$ 。

计算变幅杆的主要参量，

$$N = \frac{D_1}{D_2} = 3.25 \quad \ln N = 1.179$$

a. 求半波长度。由式(2.8)

$$l = \frac{C}{2f} \left[1 + \left(\frac{\ln N}{\pi} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{5.2 \times 10^6}{2 \times 2 \times 10^4} \cdot \left[1 + \left(\frac{1.179}{3.14} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = 139 \text{ mm}.$$

$$b. \beta = \frac{\ln N}{l} = \frac{1.179}{139} = 8.48 \times 10^{-3}$$

c. 检查一下是否满足 $f > 1.5 \frac{\beta C}{2\pi}$

$$1.5 \frac{\beta C}{2\pi} = 10.5 \times 10^3.$$

即所取工作频率满足不等式 $f > 1.5\beta C/2\pi$ 。

d. 求质点位移节点 x_0 。由式(2.11)

$$x_0 = \frac{l}{\pi} \arctg \frac{\ln N}{\pi} = \frac{139}{3.14} \arctg \left(\frac{1.179}{3.141} \right) = 53.6 \text{ mm},$$

位移节点 x_0 是从宽端算起的距离。

e. 放大系数 M_p 。由式(2.12)

$$M_p = N = 3.25.$$

f. 求应变极大点 x_M 。由式(2.17)

$$\operatorname{tg}(k'x_M) = -k'/\beta,$$

$$k = \frac{\omega}{C} = \frac{2 \times 3.14 \times 2 \times 10^4}{5.2 \times 10^5} = 2.41 \times 10^{-2}$$

$$k' = (k^2 - \beta^2)^{\frac{1}{2}} = [(2.41 \times 10^{-2})^2 - (8.48 \times 10^{-3})^2]^{\frac{1}{2}} = 2.256 \times 10^{-2}$$

$$\frac{k'}{\beta} = 2.66$$

得 $x_M = 85.5\text{mm}$.

g. 求形状因数 φ 值. 由式 (2.18)

$$\varphi = N \frac{k'}{k} e^{-\beta x_M} \frac{1}{\sin(k'x_M)}$$

表 2.1

x (mm)	βx	$e^{-\beta x}$	$D = D_1 e^{-\beta x}$ (mm)
0	0	1	52
5	0.0424	0.9589	49.8
10	0.0848	0.9185	47.8
15	0.127	0.8807	45.8
20	0.169	0.8445	43.9
25	0.212	0.8090	42.0
30	0.254	0.7757	40.3
40	0.339	0.7125	37.0
50	0.424	0.6544	34.0
60	0.509	0.6011	31.3
70	0.594	0.5521	28.7
80	0.678	0.5076	26.4
90	0.763	0.4663	24.2
100	0.848	0.4283	22.3
110	0.933	0.3934	20.5
120	1.018	0.3606	18.7
139	1.179	0.3073	16.0

$$\varphi = 3.25 \frac{2.256 \times 10^{-2}}{2.41 \times 10^{-2}} e^{-0.725} \cdot \frac{1}{0.936} = 1.57.$$

h. 根据上面所求出的参量, 计算出变幅杆外形的加工尺寸. 变幅杆直径沿轴向的变化按 $D = D_1 e^{-\beta x}$ 计算, 结果列于表 2.1. 加工尺寸如图 2.9 所示.

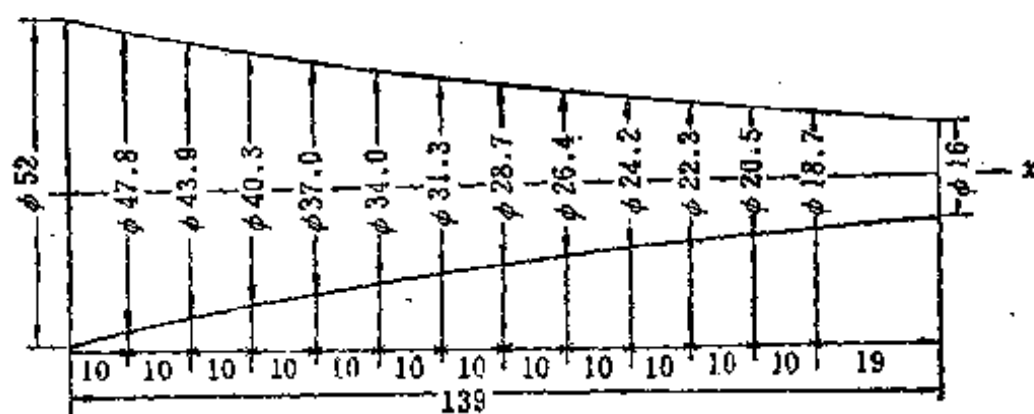


图 2.9 指数形变幅杆

2. 半波长矩形截面指数形变幅器 在某些实际应用中, 变幅杆的工作面既不是圆形也不是方形, 例如在超声塑料焊接中, 有时需要长方形或其它面积较大的不规则形状. 下面举一例子, 一变幅杆, 两端面是矩形, 一对侧面按指数曲线变化, 如图 2.10 所示.

面积函数 $S(x) = S_1 e^{-2\beta x}$, 厚度 $a = a_1 e^{-\beta x}$,

$$N = \sqrt{\frac{S_1}{S_2}} = \sqrt{\frac{a_1}{a_2}}, \quad \beta = \frac{1}{l} \ln N,$$

$$l = \frac{c}{2f} \left[1 + \left(\frac{\ln N}{\pi} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

设工作频率 $f = 20\text{kHz}$, 材料用 45 号钢,

$$a_1 = 56\text{mm}, \quad a_2 = 8\text{mm},$$

计算:

$$N = (56/8)^{\frac{1}{2}} = 2.646 \quad \ln N = 0.972,$$

$$(i) \quad l = \frac{5.2 \times 10^6}{2 \times 2 \times 10^4} \left[1 + \left(\frac{0.972}{3.14} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = 136 \text{mm},$$

$$(ii) \quad \beta = \frac{1}{l} \ln N = \frac{0.972}{136} = 7.14 \times 10^{-3},$$

$$(iii) \quad \text{检查是否满足 } f > 1.5 \frac{\beta C}{2\pi}, f > 8.8 \text{kHz},$$

$$(iv) \quad \text{位移节点: } x_0 = \frac{136}{3.14} \arccos \left(\frac{0.972}{3.141} \right) = 55 \text{mm},$$

$$(v) \quad \text{放大系数 } M_p = N = 2.646,$$

$$(vi) \quad a \text{ 边的变化规律由 } a = a_1 e^{-2\beta x} \text{ 计算得到, 列于表}$$

2.2.

表 2.2

x (mm)	$2\beta x$	$e^{-2\beta x}$	$a = a_1 e^{-2\beta x}$ (mm)
0	0	1.0	56
10	0.1428	0.867	48.6
20	0.2856	0.751	42.0
30	0.4284	0.651	36.5
40	0.5712	0.565	31.6
50	0.7140	0.490	27.4
60	0.8568	0.424	23.7
70	0.9996	0.368	20.6
80	1.142	0.320	17.9
90	1.285	0.277	15.5
100	1.428	0.241	13.5
110	1.570	0.208	11.6
120	1.713	0.180	10.0
136	1.942	0.143	8.0

(vii) 变幅杆宽度 b 的选择.

根据不同的应用来选择宽度 b . 如超声塑料焊接或超声波峰塘锡. b 的尺寸比 a 大得多, 比如 b 取 180mm, 此时宽

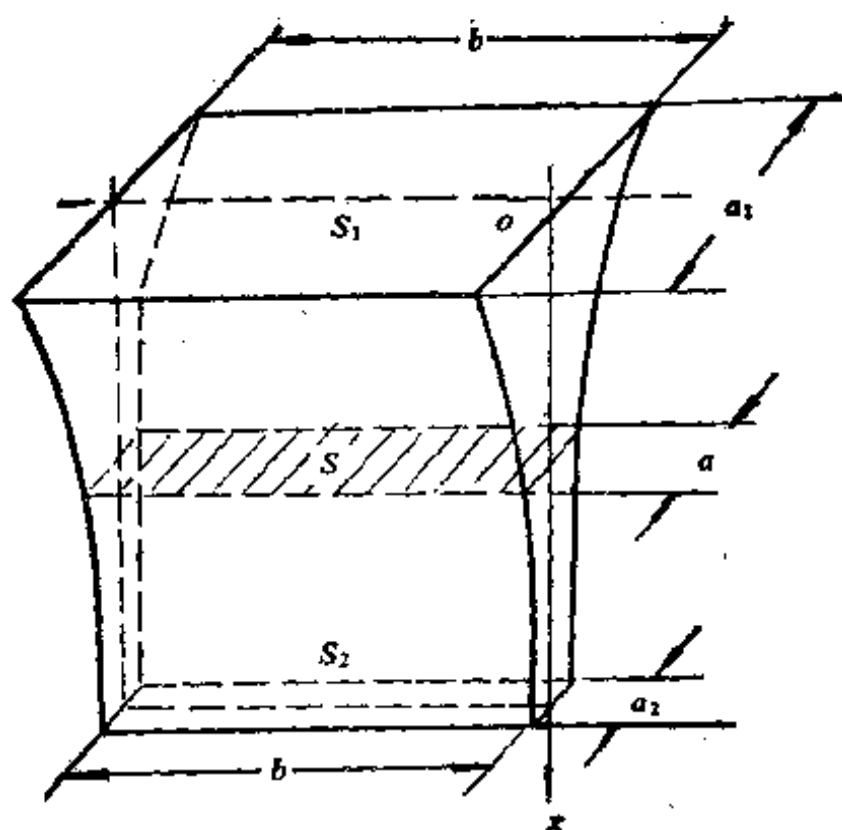


图 2.10 矩形截面的指数形变幅器

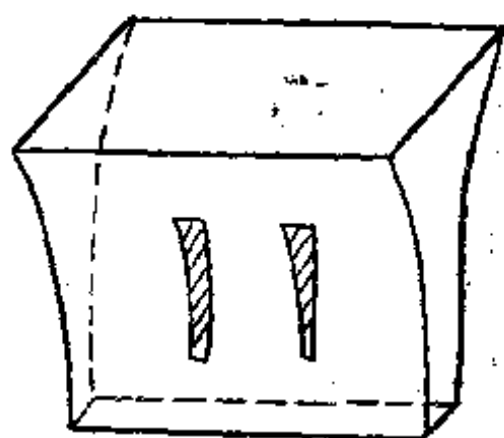


图 2.11 开槽的指数形变幅器

度已超过半波长。为减少在宽度方向的横向振动，时常开一些细长缝，缝与缝间隔一般取小于五分之一波长。如图 2.11 所示。

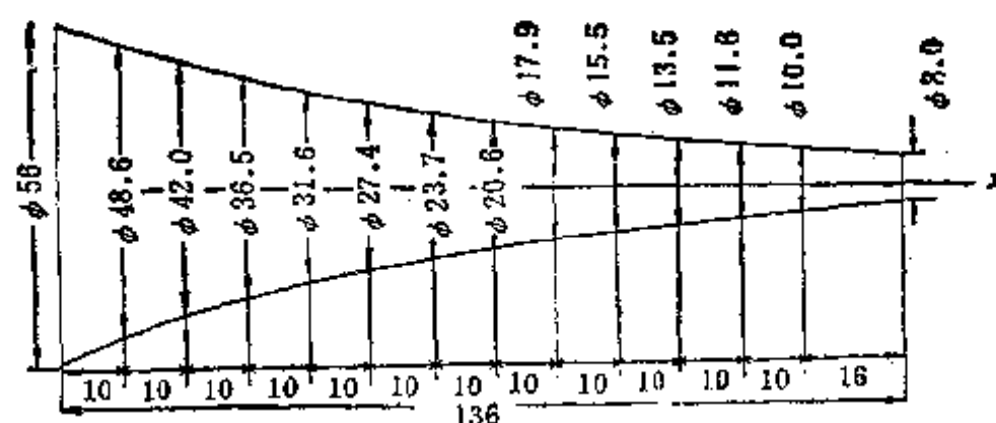


图 2.12 矩形截面指数形变幅器侧面的尺寸

§ 2.4 悬链线形变幅杆

图 2.13 为悬链线形变幅杆, 坐标原点 $x = 0$ 处的横截面积为 S_1 , $x = l$ 处的横截面积为 S_2 , 其面积函数为

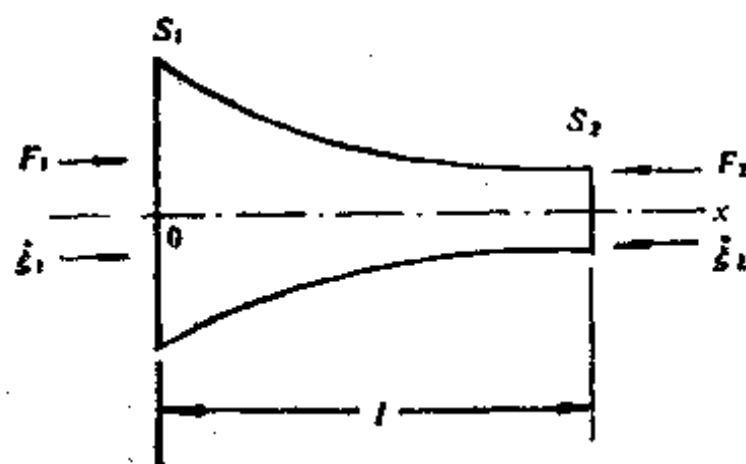


图 2.13 悬链线形变幅杆

$$S = S_2 \operatorname{ch}^2 \gamma(l - x),$$

圆截面时半径函数为

$$R = R_2 \operatorname{ch} \gamma(l - x),$$

其中

$$\gamma = \frac{1}{l} \operatorname{arc ch} N, \quad N = (S_1/S_2)^{\frac{1}{2}}.$$

作用在变幅杆的输入和输出端的力及振动速度分别为 $F_1, \dot{\xi}_1$ 及 $F_2, \dot{\xi}_2$.

根据方程式(2.2), 其位移的解为

$$\xi = \frac{1}{\operatorname{ch} \gamma(l-x)} (A_1 \cos k'_0 x + B_1 \sin k'_0 x). \quad (2.26)$$

应变为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial x} = & \frac{\gamma \sinh \gamma(l-x)}{\operatorname{ch}^2 \gamma(l-x)} (A_1 \cos k'_0 x + B_1 \sin k'_0 x) \\ & + \frac{1}{\operatorname{ch} \gamma(l-x)} (-A_1 k'_0 \sin k'_0 x + B_1 k'_0 \cos k'_0 x). \end{aligned} \quad (2.27)$$

其中 $k'_0 = (k^2 - \gamma^2)^{\frac{1}{2}}$, 可见只有满足 $f > \frac{C\gamma}{2\pi}$ 的波才能够在悬链线形变幅杆中传播.

2.4.1 频率方程和谐振长度

由式(2.27)及边界条件 $\frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0$, 得到变幅杆两端自由时的频率方程为

$$\operatorname{tg}(k'_0 l) = -\frac{\gamma}{k'_0} \operatorname{th}(\gamma l), \quad (2.28a)$$

或

$$(k'_0 l) \operatorname{tg}(k'_0 l) = -\sqrt{1 - \frac{1}{N^2}} \operatorname{arc ch} N. \quad (2.28b)$$

类似前述, 谐振长度为

$$l_p = \frac{\lambda}{2} \left[\frac{(k'_0 l)^2 + (\operatorname{arc ch} N)^2}{\pi^2} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.29)$$

其中 $k'_0 l$ 由式(2.28a)求得.

2.4.2 位移节点 x_0

由式(2.26), (2.27), 并利用边界条件 $\xi|_{x=0} = \xi_1$, $\frac{\partial \xi}{\partial x}|_{x=0} = 0$ 可确定常数 A_1 及 B_1 ,

$$A_1 = \xi_1 \operatorname{ch} \gamma l, \quad B_1 = -\operatorname{ch}(\gamma l) \cdot \frac{\gamma}{k'_0} \operatorname{th} \gamma l,$$

代入式(2.26)得

$$\xi = \xi_1 \frac{\operatorname{ch} \gamma l}{\operatorname{ch} \gamma(l-x)} \left(\cos k'_0 x - \frac{\gamma}{k'_0} \operatorname{th} \gamma l \cdot \sin k'_0 x \right). \quad (2.30)$$

应力或应变分布为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial x} = & \frac{\xi_1 \operatorname{ch} \gamma l}{\operatorname{ch} \gamma(l-x)} \left[\gamma \operatorname{th} \gamma(l-x) \right. \\ & \cdot \left(\cos k'_0 x - \frac{\gamma}{k'_0} \operatorname{th} \gamma l \cdot \sin k'_0 x \right) \\ & \left. - k'_0 \sin k'_0 x - \gamma \operatorname{th} \gamma l \cdot \cos k'_0 x \right], \end{aligned} \quad (2.31)$$

由式(2.30)得位移节点

$$\operatorname{tg}(k'_0 x_0) = \frac{k'_0}{\gamma} \operatorname{cth} \gamma l. \quad (2.32)$$

2.4.3 放大系数 M_p

放大系数 M_p 为输出端位移幅值与输入端的位移幅值之比. 由式(2.30)及边界条件 $\xi|_{x=l} = -\xi_1$ 得

$$M_p = \left| \frac{N}{\cos k'_0 l} \right|. \quad (2.33)$$

2.4.4 输入力阻抗

输入力阻抗定义为变幅杆输入端的力和速度的比值. 由

式(2.27)及边界条件 $F_1 = -S_1 E \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x=0}$ 得

$$F_1 = -S_1 E \left[\frac{\gamma \sinh \gamma l}{\cosh^2 \gamma l} A_1 + \frac{k'_0}{\cosh \gamma l} B_1 \right].$$

由边界条件 $\frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0$ 及 $\xi|_{x=0} = \xi_1$ 确定常数 A_1 及 B_1 ,

再代入上式经整理后得

$$\frac{Z_l}{Z_0} = j \frac{1}{k l} \left[\left(1 - \frac{1}{N^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \operatorname{arccch} N + k'_0 l \operatorname{tg} k'_0 l \right]. \quad (2.34)$$

2.4.5 形状因数 φ

为简化分析,方程(2.2)的解取如下形式

$$\xi = A_1 \frac{1}{\sqrt{S}} \cos(k'_0 x + \phi) \quad (2.35)$$

由边界条件 $\xi|_{x=0} = \xi_1$ 及 $\frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0$ 得

$$A_1 = \xi_1 \frac{\sqrt{S}}{\cos \phi} \cosh \gamma l,$$

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{\gamma}{k'_0} \operatorname{th} \gamma l, \quad (2.36)$$

代入(2.35)并求得应变

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \xi_1 \frac{N}{\cos \phi \cosh \gamma(l-x)} [\gamma \operatorname{th} \gamma(l-x) \\ \cdot \cos(k'_0 x + \phi) - k'_0 \sin(k'_0 x + \phi)], \end{aligned} \quad (2.37)$$

由上式求得应变极大点方程为

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(k'_0 x_M + \phi) &= \frac{\gamma}{k'_0} \operatorname{th} \gamma(l - x_M) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{k'_0} + \frac{k'_0}{\gamma} \right) \operatorname{cth} \gamma(l - x_M). \end{aligned} \quad (2.38)$$

由式(2.15b)得形状因数 φ

$$\varphi = 2 \frac{\gamma}{k} \cdot \frac{\cos(k'_0 l + \phi)}{\cos(k'_0 x_M + \phi)} \operatorname{sh} \gamma(l - x_M). \quad (2.39)$$

其中 x_M 由式(2.38)解得, 而 $\operatorname{tg} \phi = \frac{\gamma}{k'_0} \operatorname{th} \gamma l$.

2.4.6 等效网络

由式(2.26)并利用边界条件 $\dot{\xi}_1 = \frac{\partial \xi}{\partial t} \Big|_{x=0}$, $\dot{\xi}_2 = -\frac{\partial \xi}{\partial t} \Big|_{x=l}$ 得

$$A_1 = \frac{\dot{\xi}_1}{j\omega} \operatorname{ch} \gamma l,$$

$$B_1 = -\frac{\dot{\xi}_1 \operatorname{ch} \gamma l}{j\omega \operatorname{tg} k'_0 l} - \frac{\dot{\xi}_2}{j\omega \sin k'_0 l},$$

由式(2.27)及边界条件 $F_1 = -S_1 E \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x=0}$, $F_2 = -S_2 E \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x=l}$, 并考虑 A_1 及 B_1 得

$$F_1 = \left(\frac{k'_0}{k} Z_{01} \frac{1}{j \operatorname{tg} k'_0 l} - \frac{Z_{01} \gamma}{jk} \operatorname{th} \gamma l \right) \dot{\xi}_1 + \frac{k'_0}{k} \cdot \frac{Z_{01}}{j \operatorname{ch} \gamma l \cdot \sin k'_0 l} \dot{\xi}_2,$$

$$F_2 = \frac{k'_0}{k} \cdot \frac{Z_{02} \operatorname{ch} \gamma l}{j \sin k'_0 l} \dot{\xi}_1 + \frac{k'_0}{k} \cdot \frac{Z_{02}}{j \operatorname{tg} k'_0 l} \dot{\xi}_2.$$

因为 $\operatorname{ch} \gamma l = N = (S_1/S_2)^{\frac{1}{2}}$, 所以上式可改写成

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= \left(\frac{k'_0}{k} \frac{Z_{01}}{j \operatorname{tg} k'_0 l} - \frac{Z_{01} \gamma}{jk} \operatorname{th} \gamma l \right) \dot{\xi}_1 + \frac{k'_0}{k} \cdot \frac{\sqrt{Z_{01} \cdot Z_{02}}}{j \sin k'_0 l} \dot{\xi}_2, \\ F_2 &= \frac{k'_0}{k} \cdot \frac{Z_{02} \operatorname{ch} \gamma l}{j \sin k'_0 l} \dot{\xi}_1 + \frac{k'_0}{k} \cdot \frac{Z_{02}}{j \operatorname{tg} k'_0 l} \dot{\xi}_2. \end{aligned} \right\} \quad (2.40)$$

$$F_2 = \frac{k'_0}{k} \cdot \frac{\sqrt{Z_{01} \cdot Z_{02}}}{j \sin k'_0 l} \xi_1 + \frac{k'_0}{k} \cdot \frac{Z_{02}}{j \operatorname{tg} k'_0 l} \xi_2 \quad \Bigg\}$$

由式(2.40)可以建立如图 2.14 的等效网络。

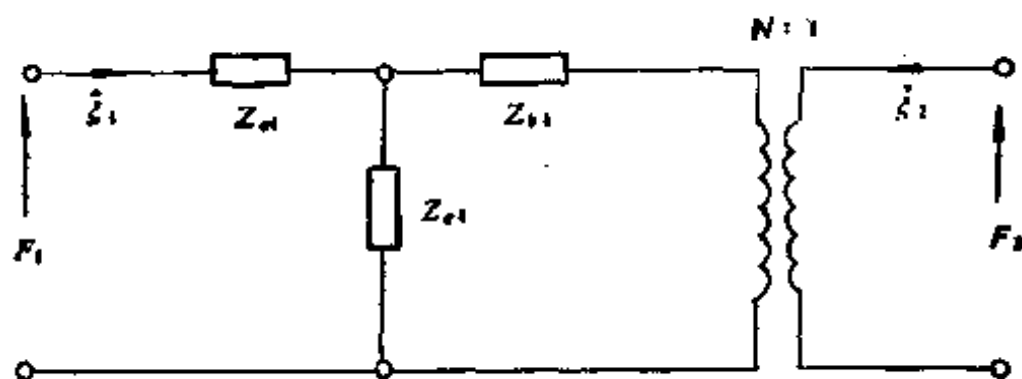


图 2.14 悬链线形变幅杆的等效网络

图中 $N = (S_1/S_2)^{1/2}$, $\gamma l = \operatorname{arcc} h N$.

$$\left. \begin{aligned} Z_a &= jZ_{01} \left(\frac{k'_0 \operatorname{tg} \frac{k'_0 l}{2}}{k} + \frac{\gamma}{k} \operatorname{th} \gamma l \right), \\ Z_{b1} &= jZ_{01} \cdot \frac{k'_0 \operatorname{tg} \frac{k'_0 l}{2}}{k}, \\ Z_{c1} &= \frac{k'_0}{k} \frac{Z_{01}}{j \sin k'_0 l}. \end{aligned} \right\} \quad (2.41)$$

图 2.14 所代表的悬链线形变幅杆的等效网络,形式上是一种集中参数的等效网络,但实质上它所代表的却是分布参数系统.从网络中的元件也可以看出,元件是以三角函数和双曲线函数表示的.

由式(2.41)可以看出,当 $N = 1$,也就是均匀截面棒的情况,其等效网络简化为均匀截面棒的等效网络(见图 2.5).

2.4.7 四分之一波长的悬链线形杆

位移节点在宽端的情况:边界条件为

$$\xi|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0,$$

由式 (2.26) 和 (2.27) 得

$$k_0' l = \frac{\pi}{2}, \quad l = \frac{\lambda_0'}{4},$$

由于 $k_0 = (k^2 - \gamma^2)^{\frac{1}{2}}$, 所以长度 L 可改写成为

$$l = \frac{\lambda}{4} \sqrt{1 + \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 (\operatorname{arc ch} N)^2}. \quad (2.42)$$

位移节点在窄端的情况: 此时边界条件为

$$\xi|_{x=l} = 0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0,$$

并由式 (2.26) 和 (2.27) 得频率方程为

$$\operatorname{th}(\gamma l) \cdot \operatorname{tg} k_0' l = \frac{k_0'}{\gamma}. \quad (2.43)$$

2.4.8 计算例举

设变幅杆的工作频率为 20kHz, 取杆的截面为圆截面, 材料为 45 号钢. 大(宽)端直径 $D_1 = 52\text{mm}$, 窄端直径为 $D_2 = 16\text{mm}$.

则

$$N = D_1/D_2 = 3.25.$$

1. 共振长度 l_p 在 $N = 3.25$ 时, 解频率方程得 $k_0' l = 2.535$ (或查计算表 2.4, 或由后面图 2.20 查得)

由式 (2.29) 得

$$\begin{aligned} l_p &= \frac{\lambda}{2} \left[\frac{(k_0' l)^2 + (\operatorname{arc ch} N)^2}{\pi^2} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= 130 \left[\frac{(2.535)^2 + (1.847)^2}{(3.14)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \approx 130\text{mm}. \end{aligned}$$

2. 位移节点 x_0

$$\gamma l = \operatorname{arc} \operatorname{ch} N = 1.847,$$

$$\gamma = \frac{1.847}{130} = 1.42 \times 10^{-2},$$

$$k_0 = \sqrt{k^2 - \gamma^2} = \sqrt{(2.41 \times 10^{-2})^2 - (1.42 \times 10^{-2})^2} \\ = 1.944 \times 10^{-2},$$

$$\frac{k'_0}{\gamma} = \frac{1.944 \times 10^{-2}}{1.42 \times 10^{-2}} = 1.36,$$

由位移节点方程得

$$\operatorname{tg}(k'_0 x_0) = \frac{k'_0}{\gamma} \operatorname{cth} \gamma l = 1.36 \times 1.048 = 1.425,$$

$$x_0 = \frac{0.959}{1.944 \times 10^{-2}} = 49.3 \text{ mm}.$$

表 2.3 悬链线形变幅杆直径与坐标 x 的关系

x (mm)	$L - x$	$\gamma(L - x)$	$\operatorname{ch} \gamma(l - x)$	$D = D_0 \operatorname{ch} \gamma(l - x)$ (mm)
130	0	0	1.000	16
120	10	0.142	1.010	16.2
110	20	0.284	1.040	16.6
100	30	0.426	1.092	17.4
90	40	0.568	1.116	17.9
80	50	0.710	1.263	20.2
70	60	0.852	1.385	22.1
60	70	0.994	1.536	24.6
50	80	1.136	1.710	27.4
40	90	1.278	1.930	31.0
30	100	1.420	2.189	35.0
25	105	1.491	2.331	37.2
20	110	1.562	2.484	39.6
15	115	1.633	2.650	42.5
10	120	1.704	2.828	45.3
5	125	1.775	3.021	48.3
0	130	1.846	3.259	52.0

表 2.4 悬链线形变幅杆共振长度的计算表

N	kl	N	kl	N	kl
1.00	3.1416	3.30	2.5295	6.20	2.3241
1.05	3.1107	3.35	2.5238	6.30	2.3198
1.10	3.0817	3.40	2.5182	6.40	2.3155
1.15	3.0543	3.45	2.5127	6.50	2.3114
1.20	3.0285	3.50	2.5073	6.60	2.3073
1.25	3.0040	3.55	2.5021	6.70	2.3033
1.30	2.9808	3.60	2.4969	6.80	2.2995
1.35	2.9588	3.65	2.4919	6.90	2.2957
1.40	2.9379	3.70	2.4869	7.00	2.2920
1.45	2.9180	3.75	2.4821	7.10	2.2884
1.50	2.8990	3.80	2.4774	7.20	2.2849
1.55	2.8809	3.85	2.4727	7.30	2.2814
1.60	2.8636	3.90	2.4682	7.40	2.2780
1.65	2.8470	3.95	2.4637	7.50	2.2747
1.70	2.8311	4.00	2.4594	7.60	2.2714
1.75	2.8159	4.05	2.4551	7.70	2.2682
1.80	2.8013	4.10	2.4509	7.80	2.2651
1.85	2.7872	4.15	2.4467	7.90	2.2620
1.90	2.7737	4.20	2.4427	8.00	2.2590
1.95	2.7607	4.25	2.4387	8.10	2.2561
2.00	2.7482	4.30	2.4348	8.20	2.2532
2.05	2.7361	4.35	2.4309	8.30	2.2504
2.10	2.7245	4.40	2.4272	8.40	2.2476
2.15	2.7132	4.45	2.4234	8.50	2.2448
2.20	2.7024	4.50	2.4198	8.60	2.2422
2.25	2.6919	4.55	2.4162	8.70	2.2395
2.30	2.6817	4.60	2.4127	8.80	2.2369
2.35	2.6718	4.65	2.4092	8.90	2.2344
2.40	2.6623	4.70	2.4058	9.00	2.2319
2.45	2.6530	4.75	2.4025	9.10	2.2294
2.50	2.6441	4.80	2.3992	9.20	2.2270
2.55	2.6354	4.85	2.3959	9.30	2.2246
2.60	2.6269	4.90	2.3927	9.40	2.2223
2.65	2.6187	4.95	2.3896	9.50	2.2200
2.70	2.6107	5.00	2.3865	9.60	2.2177
2.75	2.6029	5.10	2.3804	9.70	2.2155
2.80	2.5954	5.20	2.3746	9.80	2.2133
2.85	2.5880	5.30	2.3689	9.90	2.2111
2.90	2.5808	5.40	2.3633	10.00	2.2090
2.95	2.5738	5.50	2.3579		
3.00	2.5670	5.60	2.3527		
3.05	2.5604	5.70	2.3476		
3.10	2.5539	5.80	2.3427		
3.15	2.5476	5.90	2.3379		
3.20	2.5414	6.00	2.3332		
3.25	2.5354	6.10	2.3286		

表 2.5 圆锥形变幅杆共振长度的计算表

N	kl	N	kl
1.05	3.1424	3.55	3.5638
1.10	3.1445	3.60	3.5713
1.15	3.1478	3.65	3.5788
1.20	3.1521	3.70	3.5862
1.25	3.1573	3.75	3.5935
1.30	3.1633	3.80	3.6007
1.35	3.1700	3.85	3.6078
1.40	3.1771	3.90	3.6148
1.45	3.1848	3.95	3.6218
1.50	3.1929	4.00	3.6286
1.55	3.2013	4.05	3.6354
1.60	3.2101	4.10	3.6421
1.65	3.2191	4.15	3.6487
1.70	3.2283	4.20	3.6552
1.75	3.2376	4.25	3.6616
1.80	3.2471	4.30	3.6680
1.85	3.2567	4.35	3.6743
1.90	3.2664	4.40	3.6805
1.95	3.2762	4.45	3.6866
2.00	3.2860	4.50	3.6926
2.05	3.2958	4.55	3.6986
2.10	3.3057	4.60	3.7045
2.15	3.3155	4.65	3.7103
2.20	3.3253	4.70	3.7161
2.25	3.3351	4.75	3.7217
2.30	3.3449	4.80	3.7274
2.35	3.3546	4.85	3.7329
2.40	3.3643	4.90	3.7384
2.45	3.3738	4.95	3.7438
2.50	3.3834	5.00	3.7491
2.55	3.3928	5.10	3.7596
2.60	3.4022	5.20	3.7699
2.65	3.4116	5.30	3.7798
2.70	3.4208	5.40	3.7896
2.75	3.4299	5.50	3.7991
2.80	3.4390	5.60	3.8084
2.85	3.4480	5.70	3.8175
2.90	3.4568	5.80	3.8264
2.95	3.4656	5.90	3.8350
3.00	3.4743	6.00	3.8435
3.05	3.4829	6.10	3.8518
3.10	3.4914	6.20	3.8599
3.15	3.4999	6.30	3.8678
3.20	3.5082	6.40	3.8755
3.25	3.5164	6.50	3.8831
3.30	3.5245	6.60	3.8905
3.35	3.5326	6.70	3.8977
3.40	3.5405	6.80	
3.45	3.5484	6.90	
3.50	3.5561	7.00	

3. 放大系数 M_ϕ

由式 (2.33),

$$M_\phi = \left| \frac{N}{\cos k'_0 l} \right| = \left| \frac{3.25}{-0.823} \right| = 3.94,$$

4. 形状因数 ϕ 由式 (2.36), (2.38) 求得

$$\phi = 0.607; \quad x_M = 82.5 \text{ mm},$$

$$\begin{aligned} \phi &= 2 \frac{\gamma}{k} \cdot \frac{\cos(k'_0 l + \phi)}{\cos(k'_0 x_M + \phi)} \operatorname{sh} \gamma(l - x_M) \\ &= 2 \frac{1.42 \times 10^{-2}}{2.41 \times 10^{-2}} \cdot \frac{\cos(2.535 + 0.607)}{\cos(1.604 + 0.607)} \\ &\quad \cdot \operatorname{sh}(1.42 \times 47.5 \times 10^{-2}) = 1.436. \end{aligned}$$

5. 由式 $D = D_2 \operatorname{ch} \gamma(l - x)$ 计算出变幅杆外形的加工尺寸
计算结果列于表 2.3. 加工尺寸如图 2.15 所示.

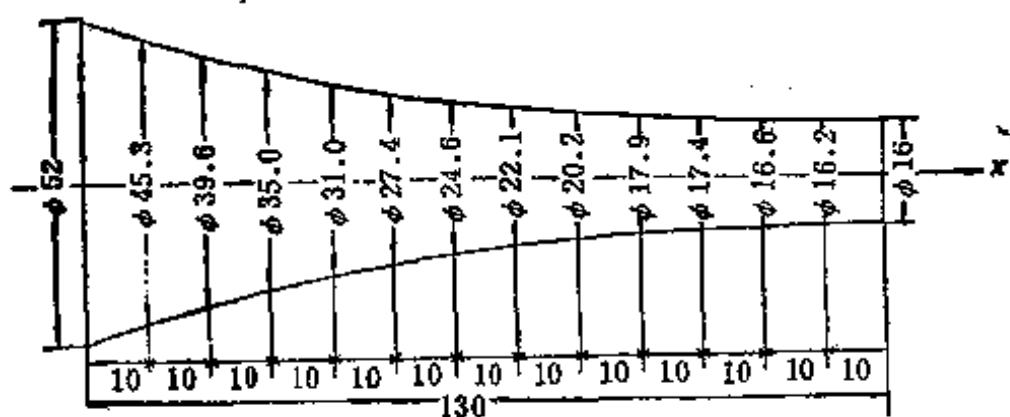


图 2.15 悬链线形变幅杆的几何尺寸

§ 2.5 圆锥形变幅杆

图 2.16 为圆锥形变幅杆, 坐标原点 $x = 0$ 处的直径为 D_1 , $x = l$ 处为 D_2 , 其面积函数为

$$S = S_1(1 - \alpha x)^2,$$

$$D = D_1(1 - \alpha x),$$

其中

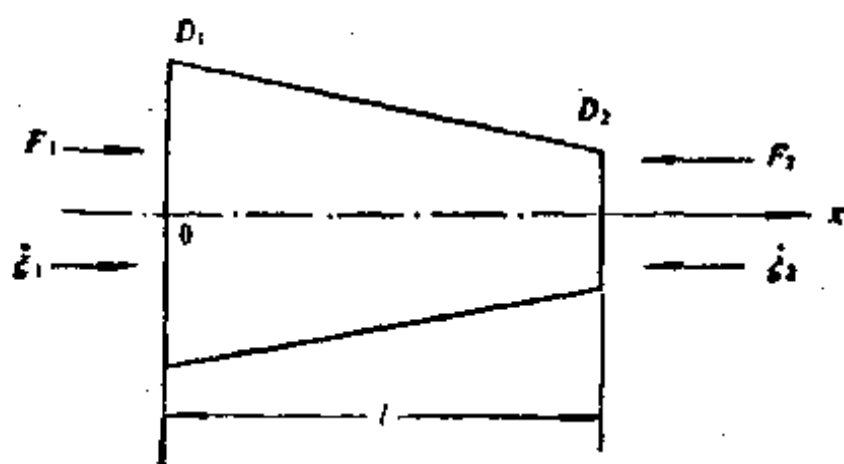


图 2.16 圆锥形变幅杆

$$\alpha = \frac{D_1 - D_2}{D_1 l} = \frac{N - 1}{N l}, N = \frac{D_1}{D_2}.$$

同样设作用在变幅杆两端面的力和振动速度分别为 F_1, ξ_1 和 F_2, ξ_2 , 此时方程(2.2)的解为

$$\xi = \frac{1}{x - \frac{1}{\alpha}} (A_2 \cos kx + B_2 \sin kx), \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial x} &= \frac{1}{x - \frac{1}{\alpha}} (-A_2 k \sin kx + B_2 k \cos kx) \\ &\quad - \frac{1}{\left(x - \frac{1}{\alpha}\right)^2} (A_2 \cos kx + B_2 \sin kx). \end{aligned} \quad (2.45)$$

2.5.1 频率方程及谐振长度

由式(2.45)及边界条件 $\frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0$ 可以得到频率方程

$$\operatorname{tg}(kl) = \frac{kl}{1 - (k/\alpha)^2(\alpha l - 1)}, \quad (2.46a)$$

或

$$\operatorname{tg}(kl) = \frac{kl}{1 + \frac{N}{(N-1)^2} (kl)^2}. \quad (2.46b)$$

由式(2.46b) 求出 (kl) 之后, 可由下式求出变幅杆的长度 l ,

$$l_p = \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{(kl)}{\pi}. \quad (2.47)$$

式中 (kl) 是式 (2.46b) 的根 (可以由表 2.5 查不同 N 值的 kl 值).

2.5.2 位移节点 x_0

由式(2.44)及(2.45), 利用边界条件 $\xi|_{x=0} = \xi_1$, $\frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0$ 确定常数 $A_2 = -\xi_1/\alpha$, $B_2 = \xi_1/k$, 代入式 (2.44) 得质点位移表达式为

$$\xi = \xi_1 \frac{1}{1 - \alpha x} \left(\cos kx - \frac{\alpha}{k} \sin kx \right), \quad (2.48)$$

应力或应变分布表达式为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial x} &= \frac{\alpha \xi_1}{(1 - \alpha x)^2} \left(\cos kx - \frac{\alpha}{k} \sin kx \right) \\ &\quad - \frac{k \xi_1}{1 - \alpha x} \left(\sin kx + \frac{\alpha}{k} \cos kx \right). \end{aligned} \quad (2.49)$$

由式(2.48), 当 $x = x_0$ 时 $\xi = 0$ 得位移节点 x_0 为

$$\operatorname{tg}(kx_0) = k/\alpha. \quad (2.50)$$

2.5.3 放大系数 M_p

由式(2.48)及边界条件 $\xi|_{x=l} = -\xi_2$, 得

$$M_p = \left| N \left(\cos kl - \frac{N-1}{Nkl} \sin kl \right) \right|. \quad (2.51)$$

2.5.4 输入力阻抗 Z_i

由式(2.45)及边界条件 $F_1 = -S_1 E \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x=0}$ 得

$$F_1 = ES_1(\alpha k B_2 + \alpha^2 A_2). \quad (2.52)$$

由边界条件 $\frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0$ 及 $A_2 = -\xi_1/\alpha$ 得

$$B_2 = \xi_1 \frac{k/\alpha + \frac{1}{\alpha l - 1} \operatorname{ctg} kl}{\frac{\alpha}{\alpha l - 1} - k \operatorname{ctg} kl}.$$

将 A_2, B_2 代入(2.52), 经整理后得

$$\frac{Z_i}{Z_{01}} = j \frac{\frac{(N-1)^2}{N} \left(\frac{1}{kl} - \operatorname{ctg} kl \right) + kl}{(kl) \operatorname{ctg}(kl) + N - 1}. \quad (2.53)$$

2.5.5 形状因数 φ

如前述, 为简化分析, 式(2.2)的解取下面的形式

$$\xi = A_2 \frac{1}{\sqrt{S}} \cos(kx + \theta). \quad (2.54)$$

由边界条件 $\xi|_{x=0} = \xi_1$ 及 $\frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0$ 定出常数

$$A_2 = \xi_1 \frac{\sqrt{S_1}}{\cos \theta}, \quad \operatorname{tg} \theta = \alpha/k. \quad (2.55)$$

代入式(2.54)得

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_1 \frac{1}{\cos \theta} \cdot \frac{1}{1 - \alpha x} \cos(kx + \theta), \\ \frac{\partial \xi}{\partial x} &= \xi_1 \frac{1}{\cos \theta} \cdot \frac{k}{1 - \alpha x} \end{aligned}$$

$$\left[\frac{\alpha}{k} \frac{1}{1 - \alpha x} \cos(kx + \theta) - \sin(kx + \theta) \right] \quad (2.56)$$

由 $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) = 0$ 得应变极大值为

$$\operatorname{tg}(kx_M + \theta) = \frac{\alpha}{k} \frac{1}{1 - \alpha x_M} - \frac{k}{2\alpha} (1 - \alpha x_M), \quad (2.57)$$

代入式(2.56)得 $\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_{\max}$ ，并由式(2.15b)得

$$\varphi = \frac{2\alpha}{k} \cdot \frac{N \cos(kl + \theta)}{\cos(kx_M + \theta)}, \quad (2.58)$$

式中 x_M 由式(2.57)及 $\operatorname{tg} \theta = \alpha/k$ 求得。

2.5.6 等效网络

由式(2.44)并利用边界条件 $\dot{\xi}_1 = \frac{\partial \xi}{\partial t} \Big|_{x=0}$ ， $\dot{\xi}_2 = -\frac{\partial \xi}{\partial t} \Big|_{x=l}$ ，得

$$A_2 = j \frac{\dot{\xi}_1}{\omega \alpha}, \quad B_2 = \frac{\dot{\xi}_1}{j \omega \alpha \operatorname{tg} kl} - \frac{\dot{\xi}_2 (\alpha l - 1)}{j \omega \alpha \sin kl},$$

由式(2.45)并利用边界条件 $F_1 = -ES_1 \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x=0}$ ， $F_2 = -ES_2 \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x=l}$ ，得

$$F_1 = \left(\frac{Z_{01}}{j \operatorname{tg} kl} - \frac{Z_{01} \alpha}{jk} \right) \dot{\xi}_1 - \frac{Z_{01} (\alpha l - 1)}{j \sin kl} \dot{\xi}_2,$$

$$F_2 = - \frac{Z_{02}}{j (\alpha l - 1) \sin kl} \dot{\xi}_1 + \left(\frac{Z_{02}}{j \operatorname{tg} kl} - \frac{Z_{02} \alpha}{jk (\alpha l - 1)} \right) \dot{\xi}_2.$$

因为 $S_2 = S_1 (1 - \alpha l)^2$ ，所以 $1 - \alpha l = (S_2/S_1)^{\frac{1}{2}} = (Z_{02}/$

$Z_{01})^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{N}$, 上式可改写为

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= \left(\frac{Z_{01}}{j \tan kl} - \frac{Z_{01} \alpha}{jk} \right) \xi_1 + \frac{\sqrt{Z_{01} \cdot Z_{02}}}{j \sin kl} \xi_2, \\ F_2 &= \frac{\sqrt{Z_{01} \cdot Z_{02}}}{j \sin kl} \xi_1 + \left(\frac{Z_{02}}{j \tan kl} + \frac{Z_{02} \alpha N}{jk} \right) \xi_2. \end{aligned} \right\} \quad (2.59)$$

由上式可以建立等效网络如图 2.17 所示.

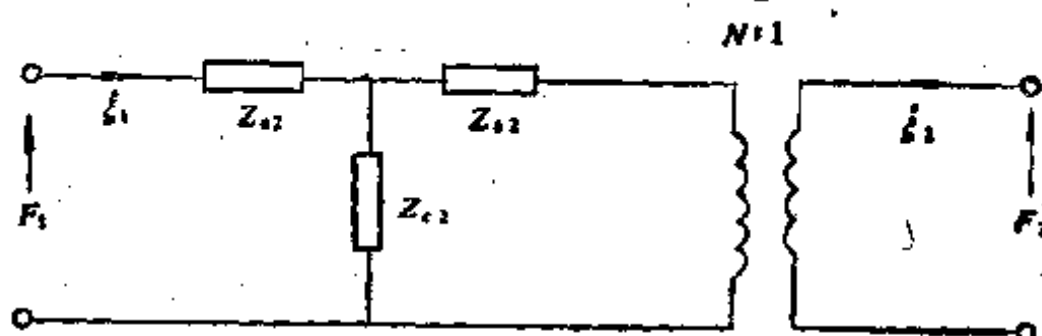


图 2.17 圆锥形变幅杆的等效网络

图中

$$\begin{aligned} N &= (S_1/S_2)^{\frac{1}{2}}, \quad \alpha = \frac{D_1 - D_2}{D_1 l} = \frac{N - 1}{Nl}, \\ \left. \begin{aligned} Z_{a1} &= jZ_{01} \tan \frac{kl}{2} + j \frac{Z_{01} \cdot \alpha}{k}, \\ Z_{b1} &= jZ_{01} \tan \frac{kl}{2} - jZ_{01} \frac{N\alpha}{k}, \\ Z_{a2} &= \frac{Z_{02}}{j \sin kl}. \end{aligned} \right\} \quad (2.60) \end{aligned}$$

由上式可以看出, 当 $D_1 = D_2$ 时就成为均匀横截面棒的情况, $\alpha = 0$ 时其等效网络与图 2.5 一样.

2.5.7 四分之一波长的圆锥杆

1. 位移节点在宽端的情况 此时边界条件为 $\xi|_{x=0} = 0$,

$\frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0$, 由式(2.44)和(2.45)得频率方程为

$$\frac{\operatorname{tg} kl}{kl} = -\frac{D_2}{D_1 - D_2} \quad (2.61)$$

其中 D_1, D_2 分别为宽端及窄端的直径。

2. 位移节点在窄端的情况 此时边界条件为 $\xi|_{x=0} = 0$,

$\frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0$, 同样由式(2.44)和(2.45)得频率方程

$$\frac{\operatorname{tg} kl}{kl} = \frac{D_1}{D_1 - D_2} \quad (2.62)$$

2.5.8 计算举例

设圆锥形变幅杆的工作频率为 20kHz, 材料用 45 号钢, 宽端直径 $D_1 = 52\text{mm}$; 窄端直径 $D_2 = 16\text{mm}$.

$$N = D_1/D_2 = 3.25.$$

1. 共振长度 l_p 先由式(2.46b)解出 kl 值, 然后由式(2.47)计算出 l_p . kl 值可由图解法, 或用计算机编程作数值计算(计算表 2.5).

当 $N = 3.25$ 时, $kl = 3.516$.

由式(2.47)得

$$l_p = \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{(kl)}{\pi} = 130 \frac{3.516}{3.141} = 144\text{mm}.$$

2. 位移节点 x_0 由式(2.50)求得,

$$k = \frac{6.28 \times 2 \times 10^4}{5.2 \times 10^6} = 2.41 \times 10^{-2}, \quad \frac{\omega}{c}$$

$$\alpha = \frac{N-1}{Nl_p} = 4.8 \times 10^{-3},$$

$$\operatorname{tg}(kx_0) = k/\alpha = 5.02, \quad \checkmark$$

$\operatorname{arctg}(5.02) = 78.734^\circ$
 $x_0 = 57\text{mm}$
 $X = \frac{78.734^\circ \times 144}{180^\circ} = 18.14\text{mm} \times 3.14 = 57\text{mm}.$

$$\cos \left[(3.516 / 3.141) \times 180^\circ \right] = -0.93$$

3. 放大系数 M_p

$$\begin{aligned} M_p &= \left| N \left(\cos kl - \frac{N-1}{Nkl} \sin kl \right) \right| \\ &= \left| 3.25 \left[-0.93 - \frac{2.25}{3.25 \times 3.516} (-0.366) \right] \right| \\ &= 2.79. \end{aligned}$$

4. 求应变极大点 x_M 由式 (2.57)

$$\begin{aligned} \lg(kx_M + \theta) &= \frac{\alpha}{k} \cdot \frac{1}{1 - \alpha x_M} - \frac{k}{2\alpha} (1 - \alpha x_M), \\ \lg \theta &= \alpha/k = 0.2, \quad \theta = 0.198, \end{aligned}$$

求得

$$x_M = 87 \text{ mm.}$$

5. 求 φ 值 由式 (2.58)

$$\varphi = \frac{2\alpha}{k} \cdot \frac{N \cos(kl + \theta)}{\cos(kx_M + \theta)} = 1.65.$$

2.5.9 带有中心孔的圆锥形变幅杆

在超声加工、焊接等应用中,有时需要一种中心带孔的变幅杆。下面给出有圆锥孔的圆柱形变幅杆及有圆锥孔的圆锥形变幅杆的计算公式。

1. 有圆锥孔的圆柱形变幅杆 这种变幅杆如图 2.18 所示。其截面半径的变化规律为

$$R = R_1 - R_2(1 + \alpha_M x), \quad \alpha_M = \frac{R_3 - R_2}{R_2 l},$$

此时波动方程(2.2)的解为

$$\xi = \frac{1}{R_1 - R_2(1 + \alpha_M x)} (A_3 \cos kx + B_3 \sin kx).$$

类似于前面的分析方法可求得

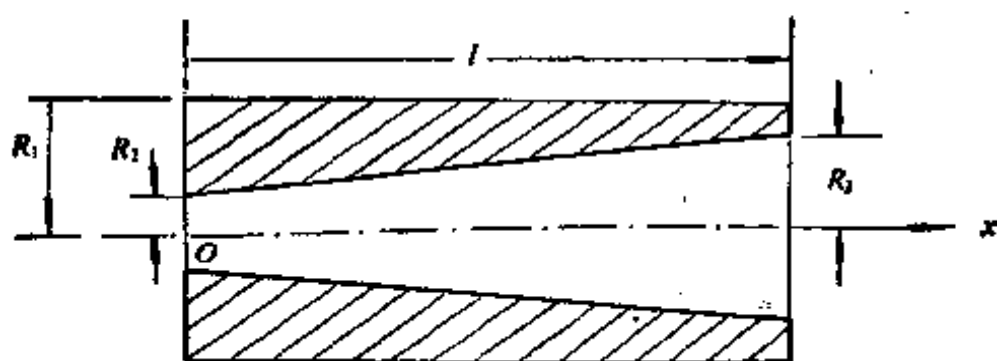


图 2.18 有圆锥孔的圆柱形变幅杆

(i) 两端自由时的共振频率方程为

$$\operatorname{tg} kl = \frac{kl}{1 + (kl)^2 \frac{(R_1 - R_2)(R_1 - R_3)}{(R_3 - R_2)^2}} \quad (2.63)$$

上式与实心圆锥变幅杆所得的结果(式 2.46b)一样。因为这里 $R_1 - R_2$ 相当于实体圆锥的宽端半径，而 $R_1 - R_3$ 相当于其窄端的半径。

(ii) 位移节点 x_0

$$\operatorname{tg} kx_0 = kl \frac{R_1 - R_2}{R_3 - R_2} \quad (2.64)$$

(iii) 放大系数 M_p

$$M_p = \left| \frac{1}{R_1 - R_3} \left[(R_1 - R_2) \cos kl - \frac{R_3 - R_2}{kl} \sin kl \right] \right| \quad (2.65)$$

2. 有圆锥孔的圆锥形变幅杆 这种变幅杆如图 2.19 所示，其截面半径的变化规律为

$$R = R_1(1 - \alpha_r x) - R_4(1 + \alpha_M x) = K - Mx,$$

其中

$$\alpha_r = \frac{R_1 - R_2}{R_1 l}; \quad \alpha_M = \frac{R_3 - R_4}{R_4 l},$$

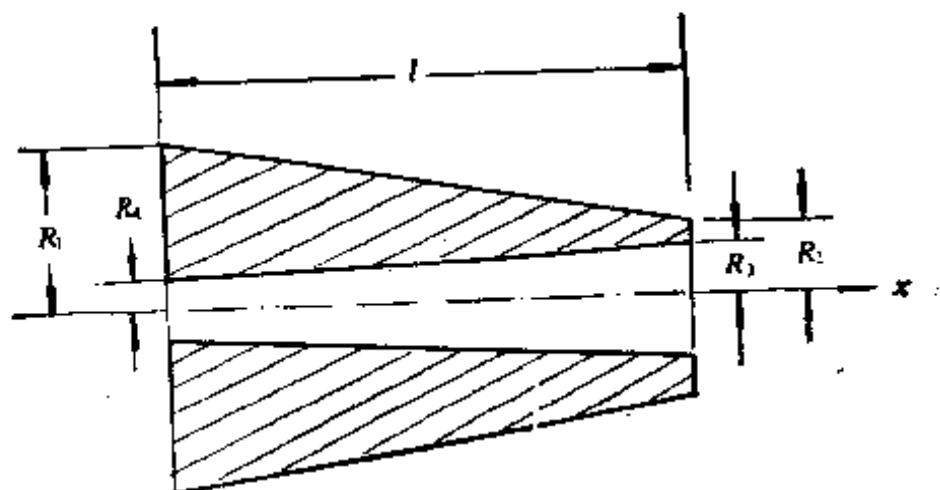


图 2.19 有圆锥孔的圆锥形变幅杆

$$K = R_1 - R_4; \quad M = \frac{R_1 - R_2 + R_3 - R_4}{l},$$

波动方程(2.2)的解为

$$\xi = \frac{1}{K - Mx} (A_1 \cos kx + B_1 \sin kx).$$

按前面的分析方法可得

(i) 两端自由时的共振频率方程

$$\operatorname{tg} kl = \frac{kl}{1 + (kl)^2 \frac{K(K - Ml)}{(Ml)^2}}. \quad (2.66)$$

当 $R_3 = R_4 = 0$ 时, 即普通的实心圆锥体的情况, 上式可简化为

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} kl &= \frac{kl}{1 + (kl)^2 \frac{R_1 R_2}{(R_1 - R_2)^2}} \\ &= \frac{kl}{1 + (kl)^2 \frac{N}{(N - 1)^2}}, \end{aligned} \quad \frac{R_1}{R_2} = N$$

与式(2.46b)所得结果相同。

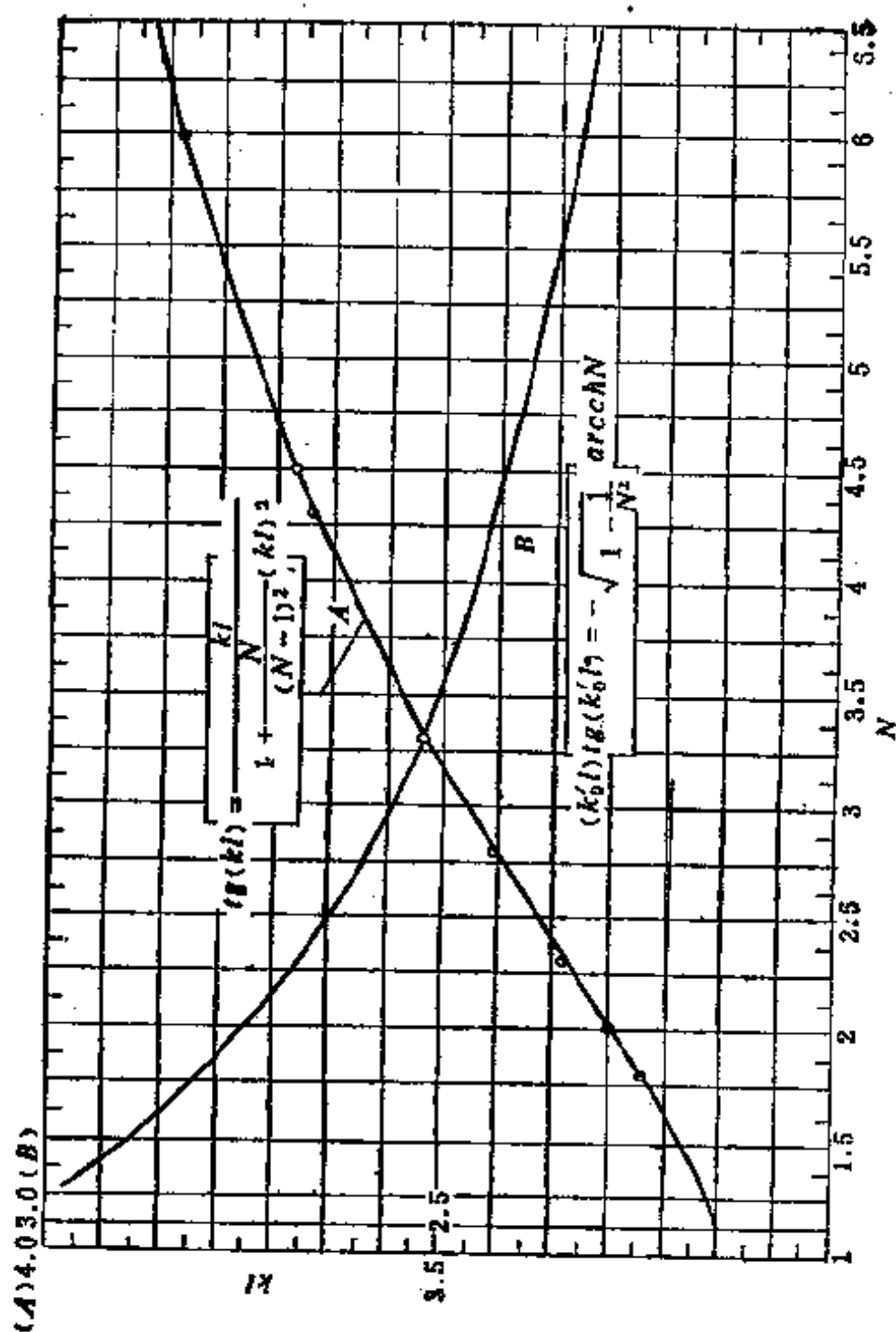


图 2.20 圆锥形(A)和悬链线形(B)变幅杆共振长度与面积系数的关系曲线

(ii) 位移节点 x_0

$$\operatorname{tg}(kx_0) = kl \frac{R_1 - R_4}{R_1 - R_2 + R_3 - R_4}. \quad (2.67)$$

同样当 $R_3 = R_4 = 0$ 时,

$$\operatorname{tg} kx_0 = k/a$$

与式(2.50)一样.

(iii) 放大系数 M_p

$$M_p = \left| \frac{1}{R_2 - R_3} \left[(R_1 - R_4) \cos kl - \frac{R_1 - R_2 + R_3 - R_4}{kl} \sin kl \right] \right|. \quad (2.68)$$

当 $R_3 = R_4 = 0$ 时, 上式简化为式(2.51).

§ 2.6 阶梯形变幅杆

阶梯形变幅杆是由两段不同截面积的均匀杆组成. 由式(2.2)可以得到均匀截面杆的波动方程

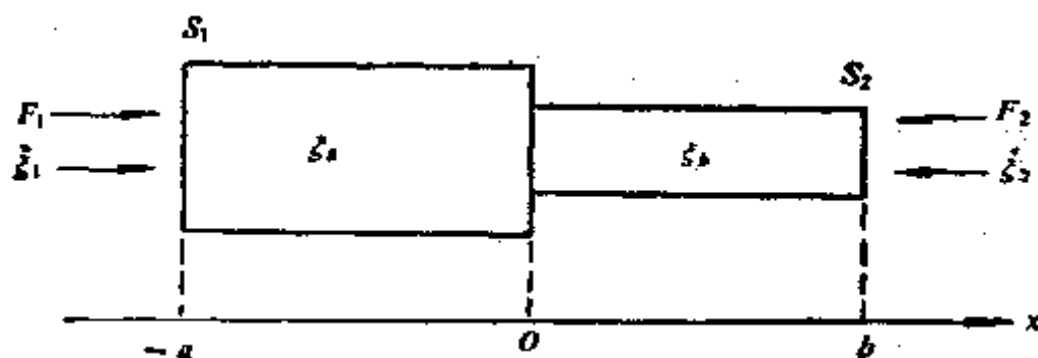


图 2.21 阶梯形变幅杆

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + k^2 \xi = 0,$$

其解可写成

$$\left. \begin{aligned} \xi_a &= (A_s \cos kx + B_s \sin kx), \quad (-a < x < 0) \\ \xi_b &= (A_b \cos kx + B_b \sin kx), \quad (0 < x < b) \end{aligned} \right\} \quad (2.69)$$

由边界条件 $\xi_a|_{x=-a} = \xi_1$ 及 $S_1 E \frac{\partial \xi_a}{\partial x} \Big|_{x=-a} = 0$ 得

$$A_1 = \xi_1 \cos ka, \quad B_1 = -\xi_1 \sin ka. \quad (2.70)$$

另一方面由边界条件

$$\xi_b|_{x=b} = -\xi_2 \text{ 和 } S_2 E \frac{\partial \xi_b}{\partial x} \Big|_{x=b} = -F_2$$

可以得到

$$\left. \begin{aligned} A_2 &= -\xi_2 \cos kb + F_2 \frac{\sin kb}{EkS_2}, \\ B_2 &= -\xi_2 \sin kb - F_2 \frac{\cos kb}{EkS_2} \\ &= -\xi_2 \left(\sin kb + j \frac{Z_L}{Z_{02}} \cos kb \right), \end{aligned} \right\} \quad (2.71)$$

其中 Z_L 是负载力阻抗。

2.6.1 质点位移及位移节点 x_0

将式(2.70), (2.71)代入式(2.69)得质点位移

$$\begin{cases} \xi_a = \xi_1 \cos[k(a+x)], \\ \xi_b = \xi_2 \left[j \frac{Z_L}{Z_{02}} \sin k(b-x) - \cos k(b-x) \right]. \end{cases} \quad (2.72)$$

位移节点 $x_0 = b - \frac{\lambda}{4}$, 当 $b = a = \frac{\lambda}{4}$ 时, 节点 $x_0 = 0$, 即在中心位置。

2.6.2 放大系数 M_p

图 2.21 中在 $x=0$ 的截面处, 由于截面跃变, 情况比较复杂。如果截面积比 S_1/S_2 不太大(例如小于 5), 则可近似认为力是连续的, 即 $S_1 E \frac{\partial \xi_a}{\partial x} \Big|_{x=0} = S_2 E \frac{\partial \xi_b}{\partial x} \Big|_{x=0}$, 利用这

一条件,由式(2.69)得

$$S_1 B_1 = S_2 B_2, \quad (2.73)$$

没有负载即 $Z_L = 0$ 时,以式(2.70),(2.71)代入(2.73)得放大系数

$$M_p = \frac{\xi_2}{\xi_1} = \frac{S_1}{S_2} \cdot \frac{\sin ka}{\sin kb}. \quad (2.74)$$

由上式可以看出,当 $a = b = \frac{\lambda}{4}$ 时(λ ——波长)放大系数达到最大。此时波节点在 $x = 0$ 的地方。

$$M_p = \frac{S_1}{S_2} = N^2, \quad \left(a = b = \frac{\lambda}{4}\right). \quad (2.75)$$

2.6.3 输入阻抗

由式(2.69)并利用边界条件 $F_1 = -S_1 E \frac{\partial \xi_1}{\partial x} \Big|_{x=-a}$

得 $F_1 = -E k S_1 (A_1 \sin ka + B_1 \cos ka), \quad (2.76)$

利用边界条件

$$\xi_a|_{x=0} = \xi_b|_{x=0} \text{ 得 } A_1 = A_2$$

同时将式(2.73),(2.70)和(2.71)代入式(2.76)得

$$\begin{aligned} \frac{Z_i}{Z_{01}} &= j \frac{\xi_2}{\xi_1} \left[j \frac{Z_L}{Z_{02}} (\sin ka \cdot \sin kb \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{N^2} \cos ka \cdot \cos kb) \right. \\ &\quad \left. - \sin ka \cos kb - \frac{1}{N^2} \cos ka \sin kb \right]. \end{aligned} \quad (2.77)$$

2.6.4 频率方程

如果用前面所讨论的方法,即利用边界条件 $\frac{\partial \xi_1}{\partial x} \Big|_{x=-a}$

$$-\frac{\partial \xi_b}{\partial x} \Big|_{x=b} = 0 \text{ 及}$$

$$\xi_a \Big|_{x=0} = \xi_b \Big|_{x=0}, \quad S_1 \frac{\partial \xi_a}{\partial x} \Big|_{x=0} = S_2 \frac{\partial \xi_b}{\partial x} \Big|_{x=0},$$

可以得到频率公式

$$-Z_{01} \operatorname{tg} k_1 a = Z_{02} \operatorname{tg} k_2 a.$$

但这一式子不普遍,不能解释 $S_1 = S_2$, 即均匀截面棒的特殊情况,也不能解释 $a = b = l$ 的阶梯形变幅杆的特定情况.因此,利用下面所述的另一种方法来建立更普遍的频率公式.即利用长线的理论来讨论,如图 2.22 所示.把截面积为 S_2 , 长度为 b 的一段作为截面积为 S_1 , 长度为 a 的一段杆的负载阻抗,此时可以写出

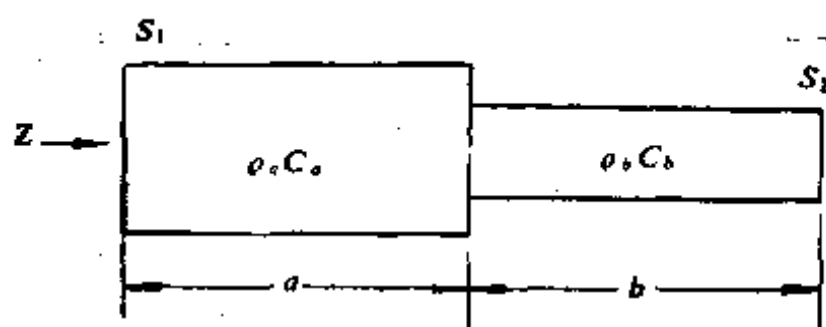


图 2.22 阶梯形变幅杆

$$Z = \frac{Z_b + jZ_{0a} \operatorname{tg}(k_a \cdot a)}{1 + \frac{Z_b}{Z_{0a}} \operatorname{tg}(k_a \cdot a)}, \quad (2.78)$$

其中 $Z_{0b} = S_2 \rho_b \cdot C_b$, $Z_{0a} = S_1 \rho_a C_a$. ρ , C 分别为材料的密度和声速.

如果杆的输出端,即窄端没有负载,则 Z_b 可写成

$$Z_b = jZ_{0b} \operatorname{tg}(k_b \cdot b),$$

式(2.78)可以改写成

$$Z = jZ_{0a} \operatorname{tg}(k_a \cdot a + \varphi_b), \quad (2.79)$$

其中

$$\operatorname{tg} \varphi_b = \frac{Z_{0b}}{Z_{0a}} \operatorname{tg}(k_b \cdot b),$$

所以频率方程为

$$\operatorname{tg}(\varphi_a + \varphi_b) = 0, \quad (2.80)$$

其中

$$\varphi_a = k_a \cdot a, \quad k_a = \frac{\omega}{C_a},$$

$$\operatorname{tg} \varphi_b = \frac{Z_{0b}}{Z_{0a}} \operatorname{tg}(k_b \cdot b).$$

由式(2.80)可见:

1. 当 $S_1 = S_2$, 即用同一材料做成的均匀截面棒的情况, 上面的频率公式变成

$$\operatorname{tg} k(a+b) = 0.$$

对基频而言, $l = a + b = \frac{\lambda}{2}$, λ 为杆中的波长.

2. 当 $S_1 \neq S_2$ 时, 杆用同一种材料做成, 且 $l = a = b$, 上面的频率公式可以写成

$$\frac{S_1 + S_2}{S_1 \operatorname{ctg} kl - S_2 \operatorname{tg} kl} = 0,$$

对基频而言, 只有 $kl = \frac{\pi}{2}$ 时上式才成立, 即

$$l = \frac{\lambda}{4}.$$

2.6.5 四分之一波长的阶梯杆

由图 2.21 及式(2.69)利用边界条件

$$\left. \frac{\partial \xi_a}{\partial x} \right|_{x=-a} = 0, \quad \xi_b|_{x=b} = 0, \quad \xi_a|_{x=0} = \xi_b|_{x=0},$$

$$S_1 \frac{\partial \xi_a}{\partial x} \Big|_{x=0} = S_2 \frac{\partial \xi_b}{\partial x} \Big|_{x=0},$$

可以得到节点在窄端的频率公式为

$$\operatorname{ctg}(ka) \cdot \operatorname{ctg}(kb) = \frac{S_1}{S_2}, \quad (2.81)$$

这就是 Camp 公式。

$$\text{节点在宽端时得 } \operatorname{ctg}(ka) \cdot \operatorname{ctg}(kb) = \frac{S_2}{S_1}.$$

2.6.6 形状因数

用前面所述的方法可以得到阶梯形变幅杆的形状因数与均匀截面棒一样, 即 $\varphi = 1$, 但是由于阶梯形变幅杆的截面变化是跃变的, 存在应力集中, 所以实际 $\varphi < 1$ 。

2.6.7 计算例举

设变幅杆工作频率为 20kHz, 材料为 45 号钢, 取圆截面, $D_1 = 52\text{mm}$, $D_2 = 16\text{mm}$ 。

则

$$N = D_1/D_2 = 3.25.$$

1. 共振长度, 这种变幅杆最常用的是 $a = b = \frac{\lambda}{4}$ 的情

况, 此时 $l = a + b = \frac{\lambda}{2} = 130\text{mm}$ 。

2. 位移节点在中心位置, 即 $x = 0$ 处。

3. 放大系数 M_p 为 $M_p = N^2 = 10.5$ 。

由于前面是近似分析, 实际上得到的放大系数 M_p 要小于 N^2 。而且随着 N 值的增大, 误差越大, 一般 N 取小于 6。

§ 2.7 楔形变幅杆

2.7.1 振动速度、应力及阻抗的分布

这种变幅杆不同于圆锥形变幅杆,其形状如图 2.23,不是轴对称。

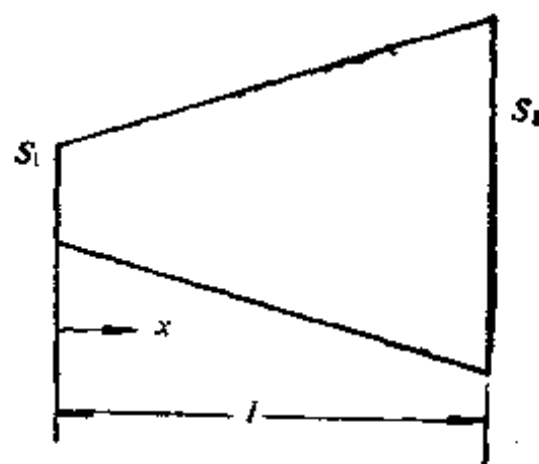


图 2.23 楔形变幅杆

其截面积变化规律为

$$S(x) = S_1 + K_w x, \quad (2.82)$$

$$K_w = (S_2 - S_1)/l, \quad (2.83)$$

根据变截面纵振动波动方程式 (2.2), 若以振动速度 $\dot{\xi}$ 表示, 则有

$$\frac{\partial^2 \dot{\xi}}{\partial x^2} + \frac{1}{S} \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial x} + k^2 \dot{\xi} = 0. \quad (2.84)$$

将式 (2.82) 代入上式, 有

$$\frac{\partial^2 \dot{\xi}}{\partial x^2} + \frac{K_w}{S_1 + K_w x} \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial x} + k^2 \dot{\xi} = 0. \quad (2.85)$$

令 $u = S_1 + K_w x$ 则有

$$\frac{\partial^2 \dot{\xi}}{\partial u^2} + \frac{1}{u} \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial u} + \left(\frac{k}{K_w}\right)^2 \dot{\xi} = 0.$$

或

$$\frac{\partial^2 \dot{\xi}}{\partial u^2} + \frac{1}{u} \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial u} + p^2 \dot{\xi} = 0, \quad (2.86)$$

其中 $p^2 = \left(\frac{k}{K_w}\right)^2$, 式(2.86)的解为零阶第一类贝塞尔函数

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= K J_0(pu) = K J_0 \left[\frac{k}{K_w} (S_1 + K_w x) \right] \\ &= K J_0 \left[k \left(\frac{S_1 l}{S_2 - S_1} + x \right) \right] \\ &= K J_0 \left[k \left(\frac{Nl}{1-N} + x \right) \right], \end{aligned} \quad (2.87)$$

其中 K 为积分常数, $N = S_1/S_2$, (见图 2.23, $N < 1$).

由边界条件 $x = 0$ 时, $\dot{\xi} = \dot{\xi}_1$ 及式(2.87)得

$$K = \frac{\dot{\xi}_1}{J_0 \left[k \left(\frac{Nl}{1-N} \right) \right]}.$$

所以振动速度 $\dot{\xi}$ 为

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= K J_0(pu) = \frac{\dot{\xi}_1 \left\{ J_0 \left[k \left(\frac{Nl}{1-N} + x \right) \right] \right\}}{J_0 \left[k \left(\frac{Nl}{1-N} \right) \right]} \\ &= j\omega \xi, \end{aligned} \quad (2.88)$$

应力分布为

$$\begin{aligned} \sigma &= E \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{E}{j\omega} \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial x} \\ &= -j \frac{C^2}{\omega} \rho \frac{\dot{\xi}_1 \left\{ -k J_1 \left[k \left(\frac{Nl}{1-N} + x \right) \right] \right\}}{J_0 \left[k \left(\frac{Nl}{1-N} \right) \right]}, \end{aligned}$$

$$\sigma = j\rho C \dot{\xi}_1 \frac{J_1 \left[k \left(\frac{Nl}{1-N} + x \right) \right]}{J_0 \left[k \left(\frac{Nl}{1-N} \right) \right]}. \quad (2.89)$$

其中 J_1 为第一类一阶贝塞尔函数。

在 x 处的阻抗为 Z_x

$$Z_x = j\rho C \left[S_1 + \left(\frac{S_2 - S_1}{l} \right) x \right] \cdot \left\{ \frac{J_1 \left[k \left(\frac{Nl}{1-N} + x \right) \right]}{J_0 \left[k \left(\frac{Nl}{1-N} + x \right) \right]} \right\}. \quad (2.90)$$

2.7.2 速度或位移节点, 应力最大点, 共振长度及放大系数

1. 节点坐标 x_0 . 其条件为

$$J_0 \left[\frac{\omega}{C} \left(\frac{Nl}{1-N} + x_0 \right) \right] = 0. \quad (2.91)$$

2. 应力最大点 x_M 为

$$J_1 \left[\frac{\omega}{C} \left(\frac{Nl}{1-N} + x_M \right) \right] = \text{最大}, \quad (2.92)$$

当 $S_1 = 0$ 时的尖楔形

$$\left. \begin{aligned} \dot{\xi} &= \dot{\xi}_1 J_0 \left(\frac{\omega x}{C} \right), \\ \sigma &= j\rho C \dot{\xi}_1 \left[J_1 \left(\frac{\omega x}{C} \right) \right], \\ Z_x &= j\rho C \left(\frac{S_2 x}{l} \right) \left[\frac{J_1 \left(\frac{\omega x}{C} \right)}{J_0 \left(\frac{\omega x}{C} \right)} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.93)$$

此时节点 x_0 为 $J_0\left(\frac{\omega x_0}{C}\right) = 0$, 应力最大点 x_M 为

$$J_1\left(\frac{\omega x_M}{C}\right) = \text{最大值}.$$

3. 共振长度 l

共振长度 l 边界条件, 两端自由时

$$\sigma|_{x=0,l} = 0; \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x=0,l} = 0,$$

即

$$J_1\left[\frac{\omega}{C}\left(\frac{Nl}{1-N} + x\right)\right] \Big|_{x=0} = 0,$$

则

$$\frac{\omega}{C}\left(\frac{Nl}{1-N}\right) = 0, 3.8317, 7.0156, 10.1735, \\ 13.3237, \dots \quad (2.94)$$

及

$$J_1\left[\frac{\omega}{C}\left(\frac{Nl}{1-N} + x\right)\right] \Big|_{x=l} = 0,$$

则

$$\frac{\omega}{C}\left(\frac{lS_2}{S_2 - S_1}\right) = 3.8317, 7.0156, 10.1735, \\ 13.3237, 16.4706, \dots \quad (2.95)$$

以式(2.94)除式(2.95)求得 $\frac{S_2}{S_1}$ 值 ($\infty, 1.832, 1.515, \dots$),

然后以 S_1 代替 S_2 代入式(2.95)而计算 l 值. 由不同的 S_2/S_1 值求出相应的 l 值列于表(2.6)

当 $S_1 = 0$ 的情况, $\omega l/C = 3.8317$, 可以直接求出 l 值.

例: 由式(2.95)当 $\frac{\omega}{C}\left[\frac{lS_2}{S_2 - S_1}\right] = 7.0156$,

表 2.6

S_2/S_1	∞	1.832	1.515	1.310	1.236	1.000
l	$3.83C/\omega$	$3.20C/\omega$	$3.16C/\omega$	$3.15C/\omega$	$3.14C/\omega$	$1.0C/\omega$

$$\text{由式(2.94)} \quad \frac{\omega}{C} \left[\frac{lS_1}{S_2 - S_1} \right] = 3.8317,$$

以式(2.94)除(2.95)得

$$S_2/S_1 = 7.0156/3.8317 = 1.832, \text{ 代入式(2.95)}$$

得 $l = 3.2C/\omega$, 确定工作频率及所用材料就可以求出长度 l 。

图(2.24)给出楔形变幅杆 C/ω 与 S_2/S_1 的关系曲线, 由此在给定 S_2/S_1 后可查出长度 l 。

4. 放大系数 M

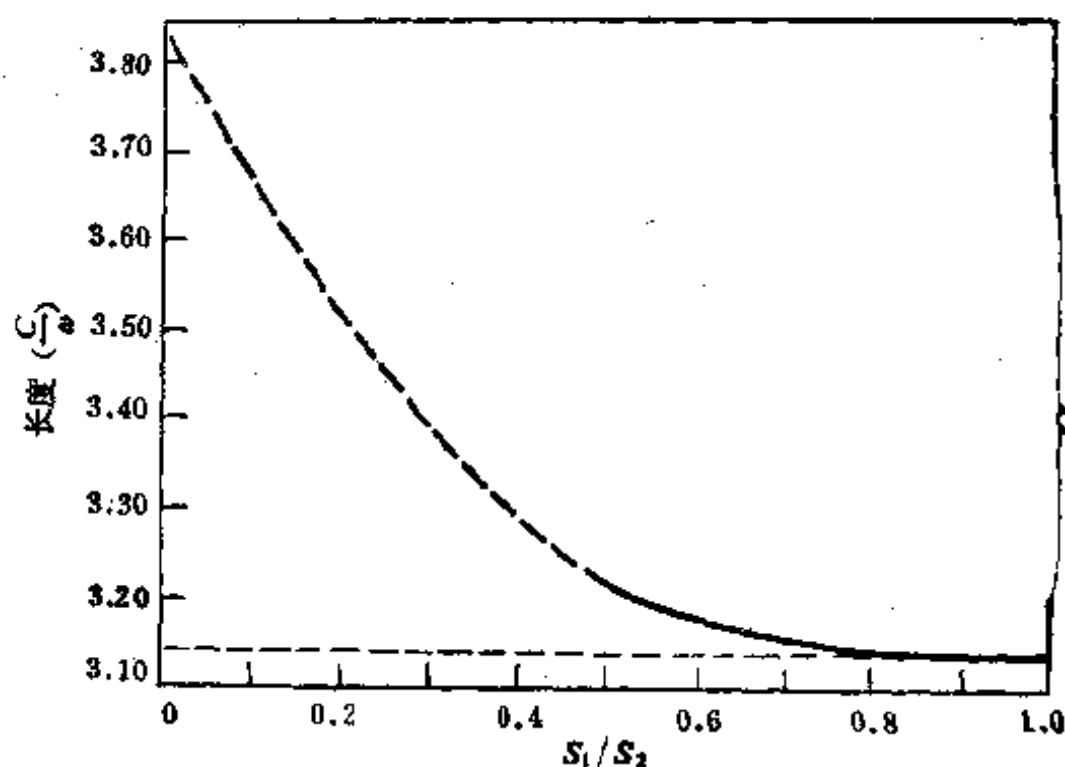


图 2.24 楔形变幅杆参数 $l (C/\omega)$ 与 S_2/S_1 的关系曲线

$$M = \frac{\xi|_{x=0}}{\xi|_{x=l}} = \frac{J_0 \left[\frac{\omega}{C} \left(\frac{Nl}{1-N} \right) \right]}{J_0 \left[\frac{\omega}{C} \left(\frac{lS_2}{S_2 - S_1} \right) \right]}$$

$$M = \frac{J_0 \left[\frac{\omega}{C} \left(\frac{Nl}{1-N} \right) \right]}{J_0 \left[\frac{\omega}{C} \left(\frac{l}{1-N} \right) \right]} \quad (2.96)$$

当 $S_1 = 0$ 时,

$$M = \frac{1}{J_0 \left(\frac{\omega l}{C} \right)} = 2.48, \quad (\text{半波共振})$$

其中 $J_0 \left(\frac{\omega l}{C} \right)$ 是 $J_0(x_0)$ 的最小值 $= -0.4028$.

§ 2.8 单一变幅杆的设计计算图表

2.8.1 计算图表

前面主要讨论了指形、悬链线形、圆锥形和阶梯形四种简单而常用的变幅杆, 得到设计时所需的计算公式. 这些设计公式中, 有些不便于工程计算. 例如悬链线形和圆锥形变幅杆的计算公式有些是超越方程, 计算较为烦琐, 如果用计算机作数值计算编成图表, 则可以大大简化设计.

由于以上四种变幅杆的讨论都是在空载情况下进行的, 也就是说按半波长谐振计算. 它们的工作状态主要决定于面积系数 N , 谐振长度 L 和纵波在细棒中传播的波长 λ . 如果定义三个系数:

1. $H \equiv L / \lambda/2$ 称为半波长谐振长度系数;

2. $G \equiv x_0 / \lambda/2$ 称为位移节点长度系数;

3. $E \equiv x_M / \lambda/2$ 称为应变极大点长度系数。

则可以将前面所得到的一部分公式进行变换,使得新的计算公式和方程中只含有一个自变量 N 。这样便于编程计算,给出设计图表。表 2.7 给出四种圆截面单一变幅杆的设计公式和方程。表 2.8—表 2.11 给出数值计算结果^[34]。

利用这些图表,只要给定变幅杆圆截面的面积系数 N ,选定工作频率及所用材料,就可以直接查到和计算出谐振长度 L ,节点坐标 x_0 ,应变或应力极大点 x_M ,放大系数 M 和形状因数 φ 。

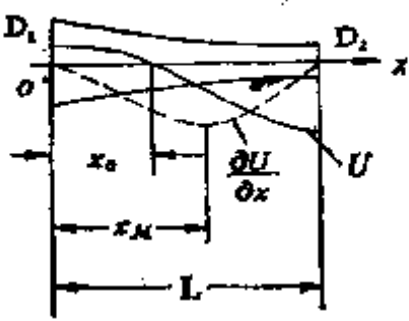
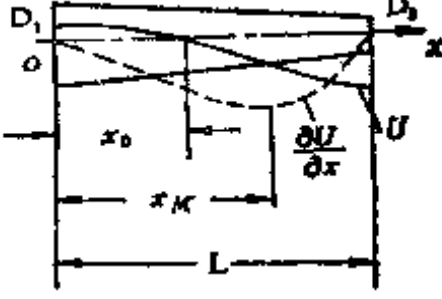
图 2.25 给出四种变幅杆的一些参数与 N 值的关系曲线,由此可以进行对比。表 2.12 给出放大系数 $M = 4$ 时四种变幅杆的尺寸和性能比较。

由图 2.25(b)可以看出:指数形和圆锥形变幅杆的谐振长度 L 随 N 的增加而增长。悬链线形变幅杆在 $N = 1.01—1.81$ 时 L 随 N 的增大而变短,以后随 N 的增大而增长;在 $N = 1.01—3.29$ 范围内谐振长度小于细棒中传播时的半波长。比较四种变幅杆的谐振长度,当 $N < 3.3$ 时, L_1 (圆锥) $> L_2$ (指数) $> L_4$ (阶梯) $> L_3$ (悬链线);当 $3.3 \leq N \leq 10$ 时 $L_2 > L_1 > L_3 > L_4$ 。 N 相同时放大系数 $M_4 > M_3 > M_1 > M_2$,而形状因数 φ 在 N 相同时 $\varphi_2 > \varphi_1 > \varphi_3 > \varphi_4$ 。

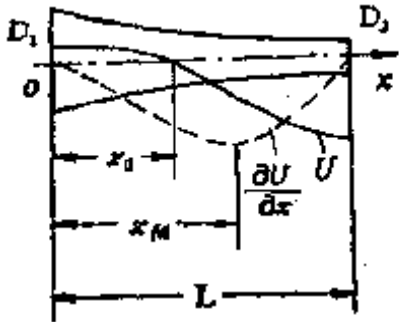
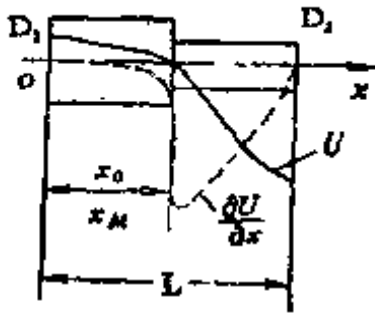
2.8.2 阶梯形变幅杆的共振频率

2.6 节中所给出的阶梯形变幅杆的共振频率公式是用近似理论得到的,没有考虑突变截面处所带来的问题,例如应力集中问题。阶梯形变幅杆的实际共振频率都低于用近似理论计算的频率值。从理论上考虑突变截面对共振频率的影响比较困难,但可以用实验方法来修正。文献 [45] 对约 200 根阶

表 2.7 四种单一半波谐振变幅

类 型	指 数 形	圆 锥 形
示 意 图	 表图 a	 表图 b
形状参数及 截面与 x 坐 标的关系	$D = D_1 e^{-\beta x}$ $\beta = \frac{\ln N}{L}$	$N = \sqrt{\frac{S_1}{S_2}}$ $D = D_1 (1 - \alpha x)$ $\alpha = \frac{N-1}{N} \cdot \frac{1}{L}$
频率方程	$\sin(K_1 L) = 0$ 即 $K_1 L = \pi$	$\operatorname{tg}(KL) = \frac{KL}{1 + \frac{N}{(N-1)^2} (KL)^2}$
半波 谐振 长度 L	变换前	$L = \frac{\lambda}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{\ln N}{\pi}\right)^2}$
	变换后	$L = H$ $H_1 = \sqrt{1 + \left(\frac{\ln N}{\pi}\right)^2}$ $H_2 = \frac{KL}{\pi}$
位移 节点 长度 x_0	变换前	$x_0 = \frac{1}{\pi} \operatorname{ctg}^{-1} \left(\frac{\ln N}{\pi} \right)$ $\operatorname{tg}(Kx_0) = \frac{K}{\alpha}$
	变换后	$x_0 = G$ $G_1 = \frac{H_1}{\pi} \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\pi}{\ln N} \right)$ $G_2 = \frac{1}{\pi} \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{N}{N-1} \cdot KL \right)$
放大系数 M	$M_1 = N$	$M_2 = \left N \left[\cos(KL) - \frac{N-1}{N} \cdot \frac{1}{KL} \sin(KL) \right] \right $

杆设计计算公式和方程

悬链线形	阶梯形
 表图 c	 表图 d

$$= \frac{D_1}{D_2}$$

$D = D_2 \cdot \text{ch} [\gamma(L - x)]$ $\gamma = \frac{\text{ch}^{-1}N}{L}$	$\begin{cases} D = D_1, & 0 \leq x \leq \frac{\lambda}{4} \\ D = D_2, & \frac{\lambda}{4} < x \leq \frac{\lambda}{2} \end{cases}$
$(K_3 L) \text{tg}(K_3 L) = -\sqrt{1 - \frac{1}{N^2}} \cdot \text{ch}^{-1}N$	$KL = \pi$
$L = \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{1}{\pi} \sqrt{(K_3 L)^2 + (\text{ch}^{-1}N)^2}$	$L = \frac{\lambda}{2}$
$\frac{\lambda}{2}$	
$H_3 = \frac{1}{\pi} \sqrt{(K_3 L)^2 + (\text{ch}^{-1}N)^2}$	$H_4 = 1$
$\text{tg}(K_3 x_0) = \frac{K_3}{\gamma} \text{cth}(\gamma L)$	$x_0 = \frac{\lambda}{4}$
$\frac{\lambda}{2}$	
$G_3 = \frac{H_3}{K_3 L} \text{tg}^{-1} \left[\frac{K_3 L}{\text{ch}^{-1}N} \text{cth}(\text{ch}^{-1}N) \right]$	$G_4 = \frac{1}{2}$
$M_3 = \left \frac{N}{\cos(K_3 L)} \right $	$M_4 = N^2$

类型		指数形	圆锥形
应变极大点长度系数 E 及应变极大点长度 x_M	变换前	由方程 $\operatorname{tg}(K_1 x_M) = -\frac{K_1}{\beta}$ 解出 x_M	由超越方程 $\operatorname{tg}(Kx_M + \theta) = \frac{\alpha}{K} \cdot \frac{1}{1 - \alpha x_M}$ $- \frac{K}{2\alpha}(1 - \alpha x_M)$ 解出 x_M . 其中 $\theta = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\alpha}{K}\right)$
	变换后	$E_1 = H_1 - G_1$	$x_M = E$ 由超越方程 $\operatorname{tg}(\pi E_2 + \theta) = \frac{N-1}{N} \cdot \frac{1}{KL}$ $\cdot \frac{1}{1 - \pi \left(\frac{N-1}{N} \cdot \frac{1}{KL} \right) E_2} - \frac{1}{2} \left(\frac{N}{N-1} \cdot KL \right)$ $\cdot \left[1 - \pi \left(\frac{N-1}{N} \cdot \frac{1}{KL} \right) E_2 \right]$ 解出 E_2 . 其中 $\theta = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{N-1}{N} \cdot \frac{1}{KL} \right)$
形状因数 φ	变换前	$\varphi_1 = N \frac{K_1}{K} e^{-\beta x_M}$ $\cdot \frac{1}{\sin(K_1 x_M)}$	$\varphi_2 = \frac{2\alpha N}{K} \cdot \frac{\cos(KL + \theta)}{\cos(Kx_M + \theta)}$ 其中 $\theta = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\alpha}{K}\right)$
	变换后	$\varphi_1 = N e^{(-\ln N) \frac{E_1}{H_1}}$	$\varphi_2 = \frac{2(N-1)}{KL} \cdot \frac{\cos(KL + \theta)}{\cos(\pi E_2 + \theta)}$ 其中 $\theta = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{N-1}{N} \cdot \frac{1}{KL} \right)$
限制条件	变换前	$t > \frac{\beta C}{2\pi}$	
	变换后	$CN_1 = \frac{\ln N}{\pi H_1} < 1$	

表 2.7(续)

悬 链 线 形	阶 梯 形
由超越方程 $\operatorname{tg}(K_3 x_M + \phi) = \frac{\gamma}{K_3} \operatorname{th}[\gamma(L - x_M)]$ $- \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{K_3} + \frac{K_3}{\gamma} \right) \operatorname{cth}[\gamma(L - x_M)]$ 解出 x_M 其中 $\phi = \operatorname{tg}^{-1} \left[\frac{\gamma}{K_3} \operatorname{th}(\gamma L) \right]$	$x_M = \frac{\lambda}{4}$
$\cdot \frac{\lambda}{2}$ 由超越方程 $\operatorname{tg} \left(K_3 L \cdot \frac{E_3}{H_3} + \phi \right) = \frac{\operatorname{ch}^{-1} N}{K_3 L} \operatorname{th} \left[(\operatorname{ch}^{-1} N) \cdot \left(1 - \frac{E_3}{H_3} \right) \right] - \frac{1}{2} \left(\frac{\operatorname{ch}^{-1} N}{K_3 L} + \frac{K_3 L}{\operatorname{ch}^{-1} N} \right)$ $\cdot \frac{1}{\operatorname{th} \left[(\operatorname{ch}^{-1} N) \left(1 - \frac{E_3}{H_3} \right) \right]}$ 解出 E_3 其中 $\phi = \operatorname{tg}^{-1} \left[\frac{\operatorname{ch}^{-1} N}{K_3 L} \operatorname{th}(\operatorname{ch}^{-1} N) \right]$	$E_3 = \frac{1}{2}$
$\varphi_2 = 2 \frac{\gamma}{K} \cdot \frac{\cos(K_3 L + \phi)}{\cos(K_3 x_M + \phi)}$ $\cdot \operatorname{sh}[\gamma(L - x_M)]$ 其中 $\phi = \operatorname{tg}^{-1} \left[\frac{\gamma}{K_3} \operatorname{th}(\gamma L) \right]$	理论上 $\varphi_2 = 1$ 实际 $\varphi_2 < 0.8$
$\varphi_2 = \frac{2 \operatorname{ch}^{-1} N}{\pi H_3} \cdot \frac{\cos(K_3 L + \phi)}{\cos \left(K_3 L \cdot \frac{E_3}{H_3} + \phi \right)}$ $\cdot \operatorname{sh} \left[(\operatorname{ch}^{-1} N) \left(1 - \frac{E_3}{H_3} \right) \right]$ 其中 $\phi = \operatorname{tg}^{-1} \left[\frac{\operatorname{ch}^{-1} N}{K_3 L} \operatorname{th}(\operatorname{ch}^{-1} N) \right]$	
$f > \frac{\gamma C}{2\pi}$	
$CN_3 = \frac{\operatorname{ch}^{-1} N}{\pi H_3} < 1$	

表 2.8 四种变幅杆参数对照总表*

N	H ₁	H ₂	H ₃	G ₁	G ₂	G ₃	M ₁	M ₂	M ₃	M ₄	φ_1	φ_2	φ_3
1.01	1.0000	1.0000	0.9990	0.4990	0.4990	0.4985	1.01	1.01	1.01	1.02	1.00	1.01	1.00
1.20	1.0017	1.0034	0.9841	0.4824	0.4832	0.4737	1.20	1.21	1.21	1.44	1.09	1.09	1.07
1.40	1.0057	1.0113	0.9750	0.4687	0.4715	0.4537	1.39	1.43	1.43	1.43	1.17	1.18	1.13
1.60	1.0111	1.0218	0.9705	0.4578	0.4630	0.4381	1.58	1.66	1.66	2.56	1.24	1.25	1.18
1.80	1.0174	1.0336	0.9692	0.4488	0.4567	0.4257	1.76	1.91	1.91	3.24	1.30	1.32	1.23
2.00	1.0241	1.0460	0.9700	0.4412	0.4519	0.4156	1.94	2.17	2.17	4.00	1.35	1.38	1.27
2.20	1.0310	1.0585	0.9725	0.4348	0.4482	0.4072	2.10	2.43	2.43	4.84	1.39	1.43	1.30
2.40	1.0381	1.0709	0.9762	0.4292	0.4454	0.4002	2.25	2.70	2.70	5.76	1.44	1.48	1.34
2.60	1.0452	1.0830	0.9806	0.4244	0.4430	0.3942	2.39	2.99	2.99	6.76	1.47	1.53	1.37
2.80	1.0523	1.0947	0.9857	0.4201	0.4412	0.3891	2.52	3.28	3.28	7.84	1.51	1.57	1.40
3.00	1.0594	1.1059	0.9912	0.4163	0.4397	0.3847	2.65	3.57	3.57	9.00	1.54	1.61	1.42
3.20	1.0663	1.1167	0.9970	0.4128	0.4384	0.3808	2.76	3.88	3.88	10.24	1.57	1.64	1.44
3.40	1.0732	1.1270	1.0031	0.4097	0.4374	0.3774	2.87	4.19	4.19	11.56	1.60	1.68	1.46
3.60	1.0799	1.1368	1.0093	0.4069	0.4365	0.3743	2.97	4.51	4.51	12.96	1.62	1.71	1.48
3.80	1.0865	1.1461	1.0156	0.4043	0.4357	0.3716	3.06	4.83	4.83	14.44	1.64	1.74	1.50
4.00	1.0930	1.1550	1.0219	0.4019	0.4351	0.3692	3.15	5.15	5.15	16.00	1.66	1.76	1.51
4.20	1.0994	1.1635	1.0282	0.3997	0.4346	0.3670	3.23	5.49	5.49	17.64	1.69	1.79	1.53
4.40	1.1056	1.1715	1.2346	0.3977	0.4341	0.3650	3.30	5.82	5.82	19.36	1.70	1.81	1.54
4.60	1.1117	1.1792	1.0409	0.3958	0.4337	0.3632	3.37	6.17	6.17	21.16	1.72	1.83	1.56
4.80	1.1177	1.1865	1.0471	0.3941	0.4334	0.3015	3.44	6.51	6.51	23.04	1.74	1.85	1.57
5.00	1.1236	1.1934	1.0533	0.3925	0.4331	0.3600	3.50	6.87	6.87	25.00	1.75	1.87	1.58
5.20	1.1293	1.2000	1.0595	0.3909	0.4328	0.3586	3.55	7.22	7.22	27.04	1.77	1.89	1.59
5.40	1.1350	1.2063	1.0656	0.3894	0.4326	0.3573	3.60	7.58	7.58	29.16	1.78	1.91	1.60

5.60	1.1405	1.2123	1.0716	0.3882	0.4324	0.3561	3.65	7.95	31.36	1.80	1.93	1.61
5.80	1.1459	1.2180	1.0775	0.3869	0.4422	0.3550	3.70	8.32	33.64	1.81	1.94	1.62
6.00	1.1512	1.2234	1.0834	0.3857	0.4320	0.3540	3.74	8.69	36.00	1.82	1.96	1.62
6.20	1.1564	1.2286	1.0891	0.3845	0.4319	0.3530	3.78	9.06	38.44	1.83	1.97	1.63
6.40	1.1615	1.2336	1.0948	0.3834	0.4318	0.3521	3.82	9.44	40.96	1.85	1.98	1.64
6.60	1.1665	1.2384	1.1004	0.3824	0.4316	0.3513	3.85	9.83	43.58	1.86	1.99	1.65
6.80	1.1715	1.2429	1.1059	0.3814	0.4315	0.3505	3.89	10.21	46.24	1.87	2.01	1.65
7.00	1.1763	1.2473	1.1114	0.3805	0.4315	0.3497	3.92	10.60	49.00	1.88	2.02	1.66
7.20	1.1810	1.2515	1.1168	0.3796	0.4314	0.3490	3.95	10.99	51.84	1.89	2.03	1.67
7.40	1.1857	1.2555	1.1220	0.3788	0.4313	0.3483	3.97	11.39	54.76	1.90	2.04	1.67
7.60	1.1903	1.2593	1.1272	0.3779	0.4312	0.3477	4.00	11.79	57.76	1.90	2.05	1.68
7.80	1.1948	1.2630	1.1324	0.3772	0.4312	0.3471	4.02	12.19	60.84	1.91	2.06	1.68
8.00	1.1992	1.2666	1.1374	0.3764	0.4311	0.3465	4.05	12.59	64.00	1.92	2.06	1.68
8.20	1.2036	1.2700	1.1424	0.3757	0.4310	0.3460	4.07	13.00	67.24	1.93	2.07	1.69
8.40	1.2079	1.2733	1.1473	0.3750	0.4310	0.3455	4.09	13.41	70.56	1.94	2.08	1.70
8.60	1.2121	1.2764	1.1522	0.3743	0.4310	0.3450	4.11	13.83	73.96	1.94	2.09	1.70
8.80	1.2162	1.2795	1.1569	0.3737	0.4309	0.3445	4.13	14.24	77.44	1.95	2.09	1.70
9.00	1.2203	1.2824	1.1616	0.3731	0.4309	0.3441	4.15	14.66	81.00	1.96	2.10	1.71
9.20	1.2243	1.2852	1.1662	0.3725	0.4308	0.3436	4.16	15.08	84.64	1.96	2.11	1.71
9.40	1.2283	1.2879	1.1708	0.3719	0.4308	0.3432	4.18	15.50	88.36	1.97	2.11	1.72
9.60	1.2322	1.2906	1.1753	0.3714	0.4308	0.3428	4.19	15.93	92.16	1.98	2.12	1.72
9.80	1.2360	1.2931	1.1798	0.3708	0.4308	0.3425	4.21	16.36	96.04	1.98	2.12	1.72
10.00	1.2398	1.2955	1.1841	0.3703	0.4307	0.3421	4.22	16.79	100.00	1.99	2.13	1.73

*指数形 $M_1 = N$, 阶梯形 $H_s = 0.5$, $G_s = 0.5$, $\varphi < 0.8$ 未列出。

表中参数后号码表示: 1——指数形; 2——圆锥形; 3——最短线形; 4——阶梯形。

表 2.9 指数形变幅杆参数表

N	$K_1 L$	H_1	G_1	M_1	R_1	φ_1	CN_1
1.01	3.141593	1.000005	0.498994	1.01000	0.50101	1.00498	0.00317
1.02	3.141593	1.000020	0.498003	1.02000	0.50202	1.00991	0.00630
4.00	3.141593	1.093033	0.401929	4.00000	0.69110	1.66490	0.40371
4.01	3.141593	1.093354	0.401816	4.01000	0.69154	1.66594	0.40432
9.99	3.141593	1.239648	0.370330	9.99000	0.86932	1.98888	0.59019
10.00	3.141593	1.239837	0.370305	10.00000	0.86953	1.98917	0.59169

表 2.10 圆锥形变幅杆参数表(含阶梯形放大系数)

N	$K_1 L$	H_1	G_1	M_1	R_1	φ_1	M_1
1.01	3.141624	1.000010	0.498997	1.01000	0.50101	1.00551	1.02010
1.02	3.141718	1.000040	0.498013	1.02000	0.50203	1.00948	1.04040
7.59	3.955713	1.259142	0.431224	3.99926	0.76464	2.04571	57.60810
7.60	3.956305	1.259331	0.431221	4.00051	0.74770	2.04617	57.76000
9.99	4.069680	1.295419	0.430729	4.21941	0.75779	2.12848	99.80010
10.00	4.070058	1.295540	0.430728	4.22006	0.75782	2.12875	100.00000

表 2.11 悬链线形变幅杆参数表

N	$K_s L$	H_s	G_s	M_s	E_s	φ_s	CN _s
1.01	3.135266	0.998999	0.498492	1.01002	0.50051	1.00487	0.04502
1.02	3.129019	0.998023	0.497006	1.02008	0.50102	1.00817	0.06368
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
3.28	1.531881	0.999437	0.379379	4.00091	0.63295	1.45063	0.59140
3.29	2.530710	0.999738	0.379207	4.01640	0.63347	1.45164	0.59224
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
9.99	2.209181	1.183918	0.342115	16.76458	0.86665	1.72685	0.80449
10.00	2.208979	1.184135	0.342098	16.78618	0.86689	1.72701	0.80461

梯形变幅杆进行了大量的实验,给出直角形(图 2.26)及带有过渡圆弧(图 2.27)两种阶梯形变幅杆的实验曲线,可供设计参考。

设变幅杆的粗端直径 D 与长度 L 的比值为 $\alpha = D/L$, 两端直径比(面积系数)为 $N = D/d$ 。定义频率降低系数 $\beta = f_{si}/f_0$, f_0 为阶梯形变幅杆共振频率的理论值, $f_0 = C_l/2L$; C_l 为杆材料中的纵波速度; f_{si} 为阶梯形变幅杆的实际共振

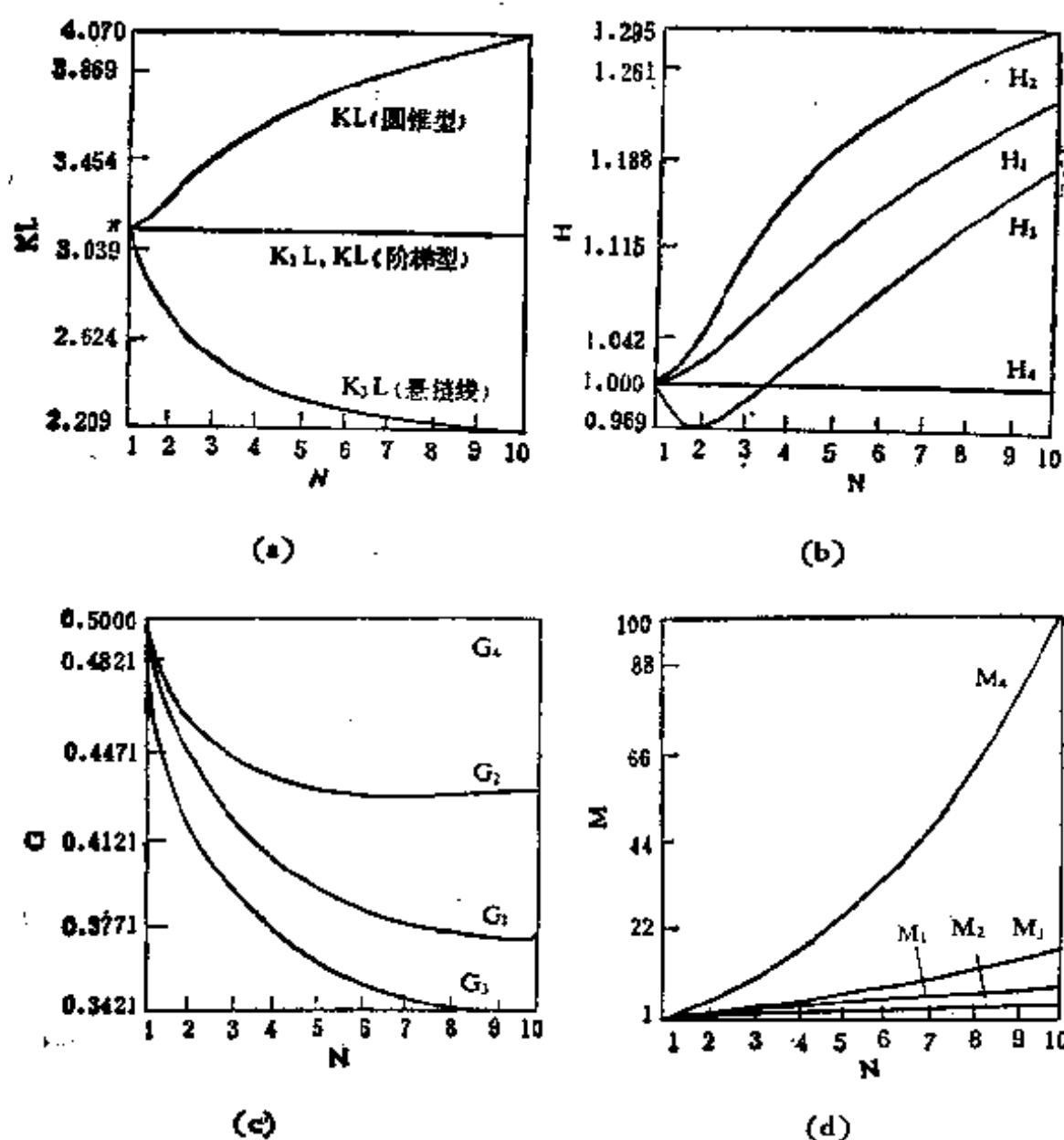


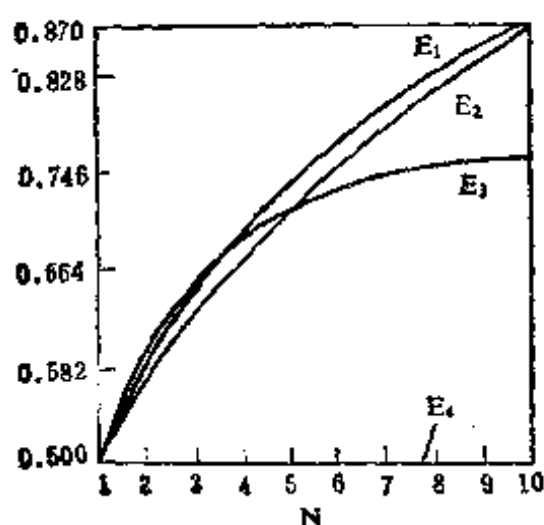
图 2.25 几种变幅杆的主要

频率。取一系列不同 N 及 α 值的变幅杆进行测量, 得到图 2.28 的实验曲线。

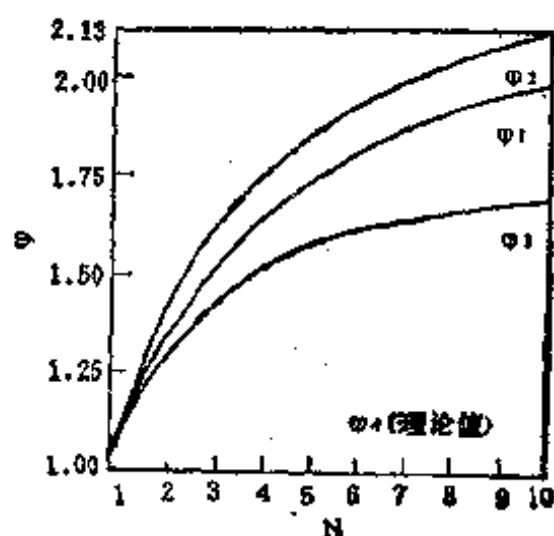
由图 2.28 的实验曲线可以看出:

(i) 对于每一个 α 值, 当 N 由 1 开始增大时, β 逐渐减小; 当 $N = 2.6-3$ 时, β 达最小值; 当 N 再增大时, β 复又上升。

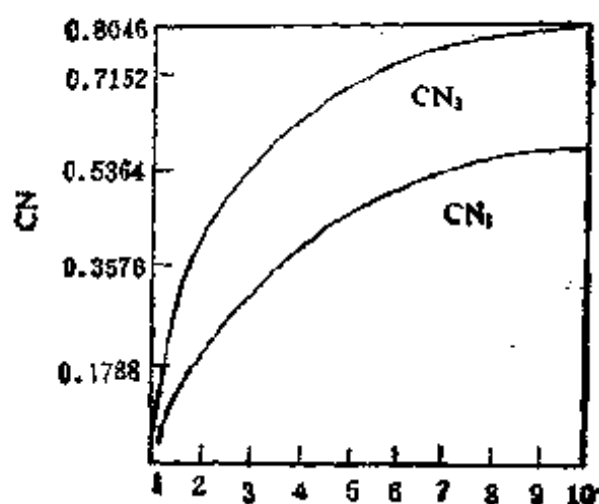
(ii) 对于同一 N 值, α 越大, β 下降也越多, 在 $\alpha = 0.10$ 时 $\beta-N$ 曲线很平坦。



(c)



(f)



(g)

参数与 N 值的关系曲线

表 2.12 M-4 的四种变幅杆主要尺寸及性能参数

	项 目	指数形	圆锥形	悬链线形	阶梯形
L	N	4.00	7.60	3.28	2.00
	M	4.00	4.00	4.00	4.00
	K'L	π	3.956305	2.531881	π
	H	1.093033	1.259331	0.999437	1.000000
x_0	$L = H \cdot \frac{\lambda}{2} \text{ (mm)}$	142.09	163.71	129.93	130.00
	G	0.401929	0.431221	0.379379	0.500000
	$x_0 = G \cdot \frac{\lambda}{2} \text{ (mm)}$	52.25	56.06	49.32	65.00
	E	0.69110	0.74770	0.63295	0.50000
x_M	$x_M = E \cdot \frac{\lambda}{2} \text{ (mm)}$	89.84	97.20	82.28	65.00
	ϕ	1.66490	2.04617	1.45063	< 0.8

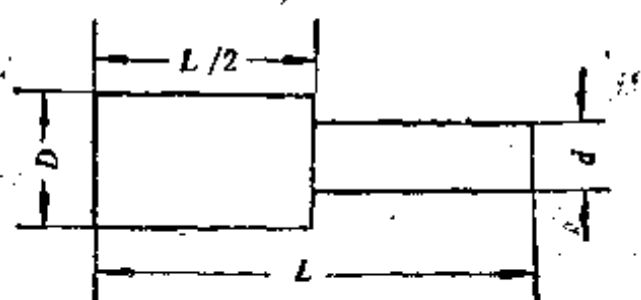


图 2.26 直角形阶梯变幅杆

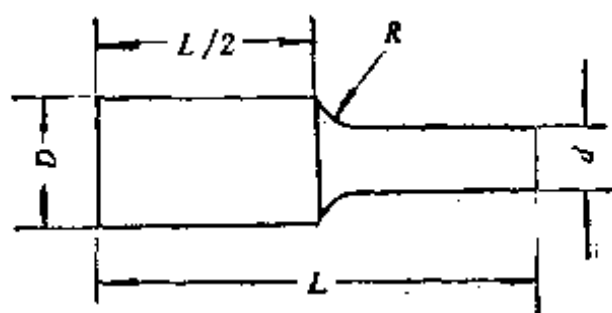


图 2.27 带过渡圆弧的阶梯变幅杆

在给定 D , d 时利用图 2.28 可以设计变幅杆达到预定的共振频率 f_p , 其步骤如下:

(i) 根据无限长细杆中的纵波声速 C_l 和 f_p 定出变幅杆的近似长度 L' , $L' = C_l / 2f_p$.

(ii) 根据 D , L' 确定变幅杆的近似径长比 α , $\alpha = D / L'$.

(iii) 根据 α 和 N , 从图 2.28 中找出频率降低系数 β . 则共振频率为 f_p 时的变幅杆长度为 $L = \beta L'$.

由于确定 β 时所用的径长比是近似的, 亦即是由 L' , 而不是由 L 决定的, 所以 β 值也是近似值. 但由此带来的设计误差不会超过 1%, 如果用求得的 L , 如上述再确定一次 α 和 β 值, 其精度可以进一步提高.

在实际应用中, 为减少阶梯形变幅杆在突变截面处的应力集中, 时常在突变截面处采用过渡圆弧, 如图 2.27 所示. 此

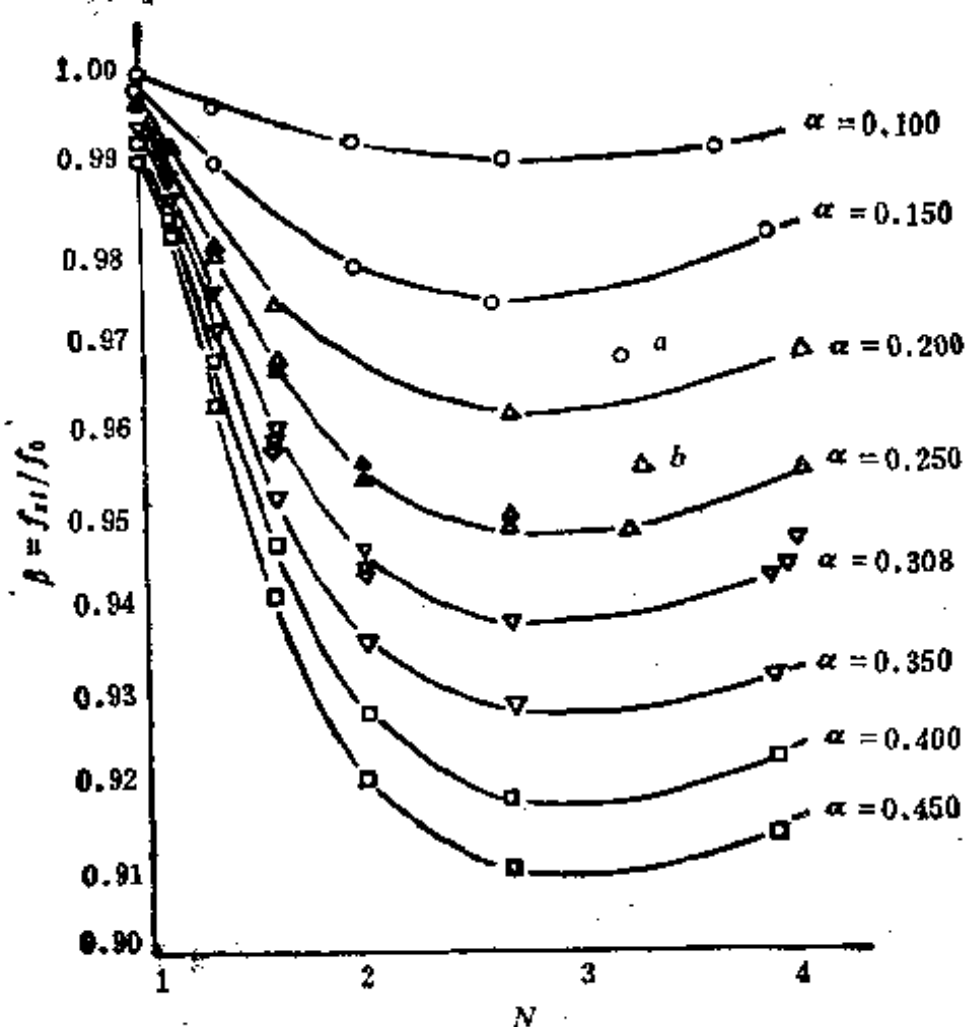


图 2.28 频率降低系数 β 与面积系数 N 的关系曲线

时过渡圆弧半径 R 对变幅杆的共振频率有较大的影响, 对应于某一 N 及 α 值, 存在一半径 R , 使得变幅杆的实际共振频率和按无限长细棒中声速计算出的共振频率值 f_0 一致, 称此半径为最佳过渡圆弧半径 R_{op} . 图 2.29 给出带过渡圆弧的阶梯形变幅杆最佳圆弧半径与 N 值的关系曲线. 利用它可以设计 $\alpha = 0.25 \sim 0.45$, $N = 1 \sim 4$ 之间的带过渡圆弧变幅杆. 设计步骤如下: 根据所选定的变幅杆大端直径 D 和小端直径 d 来确定所设计的共振频率 f_r .

- (i) 计算变幅杆的长度 L , $L = C_l / 2f_r$,
- (ii) 根据 D 和 L 确定 α 值,
- (iii) 根据 D 和 d 确定 N ,

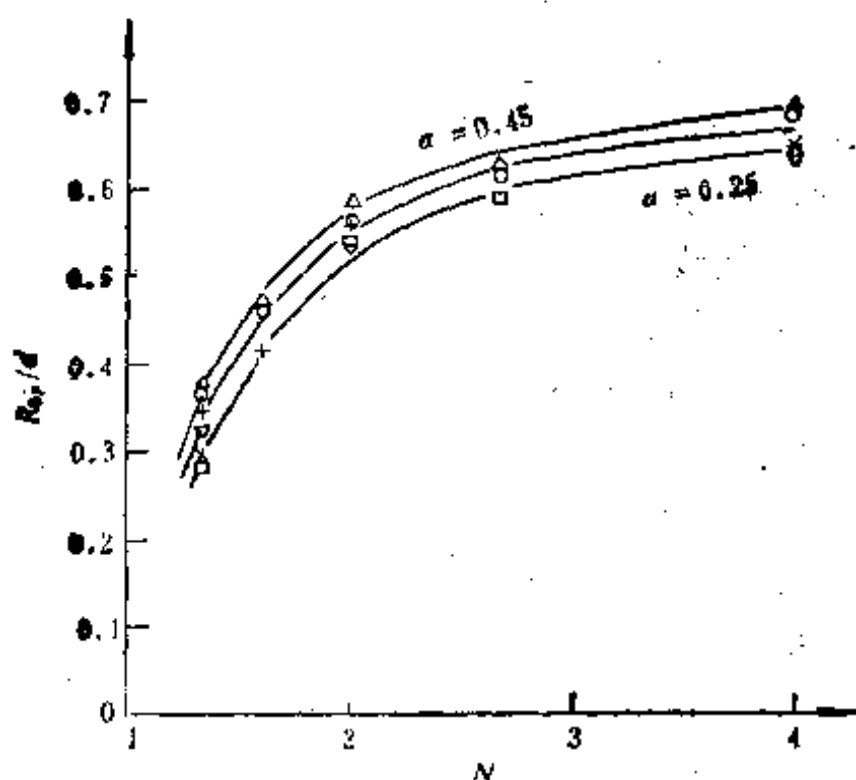


图 2.29 最佳圆弧半径与 N 的关系曲线

(iv) 根据 N 和 α 由图 2.29 找出对应的 R_{0p}/d ,

(v) 由 R_{0p}/d 的值算出 R_{0p} 值。

图 2.29 中的参数 α 只给出 $\alpha = 0.25$ 及 0.45 值, 在此范围内的其他 α 值可用中间的一条曲线代替, 其精度在 5×10^{-3} 之内。当 $\alpha = 0.1 - 0.25$ 时, 可用 $\alpha = 0.25$ 的曲线代替。当 $\alpha < 0.1$ 时即使没有过渡圆弧, 设计频率和理论值之差也小于 1%。

§ 2.9 小 结

本章讨论了超声工程上常用的指数形、悬链线形、圆锥形及阶梯形变幅杆, 此外还讨论了楔形变幅杆。给出设计这些变幅杆的主要公式及计算例子。这些设计公式都是在空载情

况下得出的,有负载的情况在另一章中讨论。为便于设计,前四种常用变幅杆的主要设计公式都列出表格,并给出设计表及曲线。从前面分析可以看出:

(i) 当面积系数 N 相同时,阶梯形变幅杆的放大系数最大,其次是悬链线形、指数形,最小是圆锥形。

(ii) 指数形和圆锥形的谐振长度 L 随 N 的增大而增长,悬链线形 N 在1.01—1.81时 L 随 N 的增大而变短,以后随 N 增大而增长。

(iii) 在设计变幅杆时,除要求尽可能大的放大系数外,还需要根据变幅杆的不同工作状态,选择其输入阻抗的特性。一般说,变幅杆工作在负载变化比较大的条件下,应该选择输入阻抗变化较小的变幅杆。为便于比较,图2.30给出几种变幅杆输入阻抗随频率偏移的变化特性(由表2.13计算)。由图2.30可见,阶梯形变幅杆(M_p 相同, $M_p = 4.6$)的输入阻抗变化较大,但其放大系数在相同的面积系数 N 下最大,所以在负载为液体的功率超声处理应用中(如破碎细胞、乳化

表 2.13

类型	输入阻抗 Z_i
指数形	$\frac{Z_i}{Z_{01}} = j \frac{[(k'l)^2 + (\ln N)^2]^{1/2}}{\ln N + k'l \operatorname{ctg} k'l}$ $k' = (k^2 - \beta^2)^{1/2}$
悬链线形	$\frac{Z_i}{Z_{01}} = j \frac{1}{k'l} \left[\left(1 - \frac{1}{N^2}\right)^{1/2} \operatorname{arc} \operatorname{ch} N + k_0'l \operatorname{tg} k_0'l \right]$ $k_0 = (k^2 - \gamma^2)^{1/2}$
圆锥形	$\frac{Z_i}{Z_{01}} = j \frac{\frac{(N-1)^2}{N} - \left(\frac{1}{k'l} - \operatorname{ctg} k'l\right) + k'l}{k'l \operatorname{ctg} k'l + N - 1}$

表 2.14

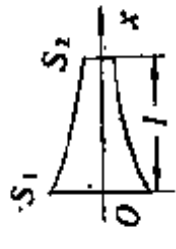
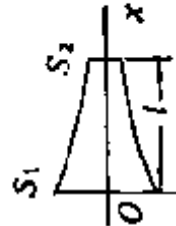
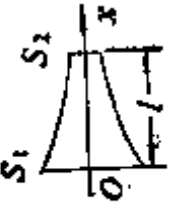
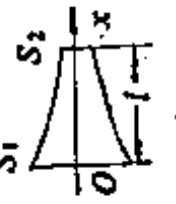
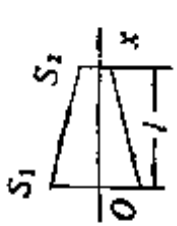
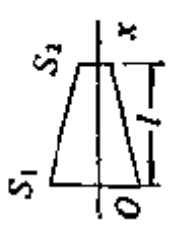
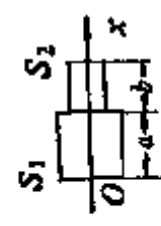
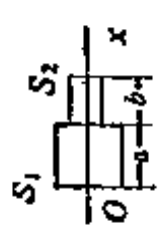
	指数		悬链线形	
	节点在宽端	节点在窄端	节点在宽端	节点在窄端
节点位置	 $S _{x=0} = 0$	 $S _{x=l} = 0$ 等	 $S _{x=0} = 0$	 $S _{x=l} = 0$
频率公式	$(k'l) \operatorname{ctg}(k'l) = -\ln N$	$(k'l) \operatorname{ctg}(k'l) = \ln N$	$l = \frac{\lambda}{4} \left[1 + \left(\frac{2}{\pi} \right)^2 \cdot (\operatorname{arcc} N)^2 \right]^{1/2}$	$\operatorname{th}(x'l) \operatorname{ctg} k'l = \frac{k_0}{\gamma}$

表 2.14 (续)

	圆锥形		阶梯形	
	节点在宽端	节点在窄端	节点在宽端	节点在窄端
节点位置	 $\xi _{x=0} = 0$	 $\xi _{x=l} = 0$	 $\xi _{x=0} = 0$	 $\xi _{x=b} = 0$
频率公式	$\frac{\operatorname{tg} kl}{kl} = -\frac{D_2}{D_1 - D_2}$	$\frac{\operatorname{tg} kl}{kl} = \frac{D_1}{D_1 - D_2}$	$\operatorname{ctg} ka \operatorname{ctg} kb = \frac{S_2}{S_1}$	$\operatorname{ctg} ka \operatorname{ctg} kb = \frac{S_1}{S_2}$

等)时常采用阶梯形变幅杆,这种变幅杆制造也比较简单。同样可以看出,在空载情况下悬链线形的放大系数和输入阻抗特性都比指数形变幅杆好。

(iv) 在高声强超声应用中(如超声疲劳试验,超声金属成型,超声加工等)在变幅杆的工作端需要大的振动振幅。如前面所述,变幅杆的最大振动速度除了受杆材料的疲劳强度限制之外也和变幅杆的形状有关。所以在满足所需要的放大系数之外还应选择形状因数大的变幅杆。阶梯形变幅杆虽然放大系数大,但其形状因数 φ 最小。在相同面积系数 N 时

$$\varphi_{\text{悬链}} > \varphi_{\text{指数}} > \varphi_{\text{悬链线}} > \varphi_{\text{阶梯}}。$$

当在变幅杆的工作端需要特别大的振动速度时,用单一

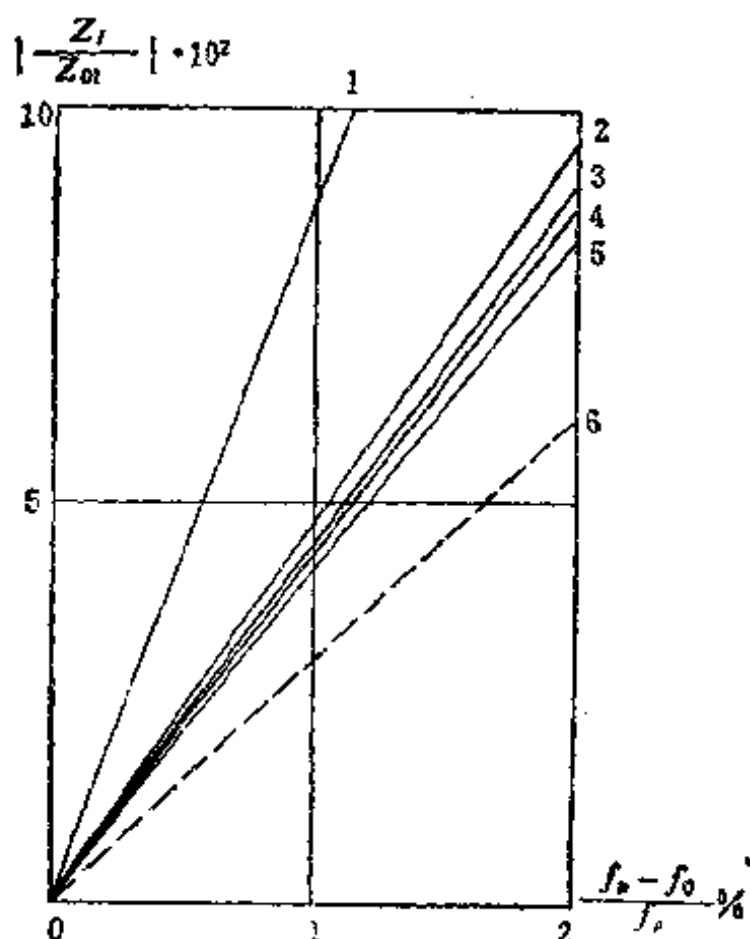


图 2.30 1——阶梯形($l_1 = l_2$) 2——指数形 3——圆锥形
4——悬链线形 5——窄端带圆柱的圆锥形

变幅杆常常不能达到要求。此时需要用两节变幅杆组合。第一节用 φ 值不大而放大系数大的变幅杆（例如用带有过渡段的阶梯形变幅杆或傅立叶型变幅杆（见下章讨论））。第二节用 φ 值大的变幅杆，如具有恒应力分布的高斯“钟形曲线”变幅杆（见下章讨论）。

表 2.14 给出以上几种形状的四分之一波长的变幅杆的频率公式*。而利用表 2.4，2.5 及表 2.8—2.11 以及设计曲线（图 2.20），可以根据所需的频率及 N 值直接查出变幅杆的共振长度及性能参量。

* 林仲茂，超声变幅杆的理论和设计，中国科学院物理研究所（1973）。

第七章 超声变幅杆的设计和测量

§ 7.1 变幅杆类型及所用材料的选择

7.1.1 变幅杆类型的选择

在功率超声技术应用中,变幅杆的主要作用有两个:一是将机械振动位移或速度振幅放大,或者把能量集中在较小的辐射面上、即聚能作用;另一个作用是作为机械阻抗的变换器,使超声能量由超声换能器更有效地向负载传输。

在高声强超声处理应用中,例如超声切钻硬脆材料、超声焊接、超声金属成型(包括拉丝、拉管和铆接等等)、超声疲劳试验、超声破碎、乳化、超声搪锡、超声破碎细胞及某些超声治疗等等,变幅杆主要起放大聚能作用。在这些应用中对变幅杆的要求主要是要有尽可能大的放大系数。其次,根据不同的负载情况来选择变幅杆的其它参量,如输入阻抗特性、弯曲劲度等等。

当变幅杆的负载是液体或液体与固体粒子的混合液时(如乳化、破碎固体粒子或细胞),在超声处理过程中负载变化较小,而且不需要外加静压力。此时对变幅杆的输入阻抗特性及弯曲劲度要求不高,因此常常采用简单阶梯形变幅杆,因其机械加工较容易,而且在面积系数相同的情况下,放大系数最大。此外还常采用悬链线形、指数形或其他形式的复合变幅杆。

当变幅杆的负载是固体时,如超声焊接、超声切钻等,在工作中大多需要加一定的静压力,特别是在超声加工过程中,

加工工具不断地磨损,在这些场合,负载变化较大,因而对变幅杆的要求除了要有足够大的放大系数外,还要求工作稳定性高,有足够的弯曲劲度,所以此时可用指数形,悬链线形或其他形式的复合变幅杆.当放大系数要求不大时最好采用圆锥形变幅杆,因其弯曲劲度较大,工作稳定性高,而且容易进行机械加工.

在某些特殊场合,如超声疲劳试验或超声外科手术器械,要求变幅杆末端的振动速度很大,即要求变幅杆的放大系数很大的情况下,用单变幅杆时常达不到要求(因为放大系数和形状因数不能同时满足要求),此时可采用两节变幅杆.例如末节用形状因数 φ 大的高斯形变幅杆,而推动节采用放大系数大的具有过渡段的阶梯形变幅杆或傅里叶型变幅杆.

在超声清洗或大面积超声搪锡等应用中,常常利用变幅杆的另一个作用,即阻抗匹配作用.例如采用四分之一波长的圆锥体组成的夹心式压电换能器或倒锥形变幅杆等,以提高辐射效率.

近年来发展了一种新的超声应用,即利用超声来“帮助”金属冷加工.例如超声冷拔金属丝、管等,因为它能提高加工质量、提高生产率、并可以加工一般工艺不能加工的难变形金属等.这种新的技术应用越来越受到人们的重视.在这类应用中,需要几千瓦,甚至几十千瓦的大功率超声,并且要求较高的声强.单个换能器往往不能提供足够大的功率,因此必须采用由多个换能器合成的振动系统,此时选用振动方向变换器较为合适.在超声冷拔金属管中常采用 $R-L$ 振动方向变换器,就是圆盘和与其垂直连接的棒组成的振动系统.在圆盘的圆周上安装若干个换能器,在产生径向振动的同时,将能量集中到盘中心,然后变换成沿棒轴向的纵振动再施加于拉模.

此外,对某些特殊处理对象及振动系统要求特殊固定方式的情况,可以根据需要及各种变幅杆的性能加以选择和组合,这里不再一一例举了。

7.1.2 变幅杆材料的选择

对材料的要求是: 1. 在工作频率范围内材料的损耗小, 2. 材料的疲劳强度高,而声阻抗率小, 3. 易于机械加工,作液体处理应用时还要求变幅杆的辐射面所用的材料耐腐蚀。附表 1—7 列举了一些固体材料的性能。

适合上述要求的金属材料有铝合金、铜镍合金,如 K 蒙乃尔合金、铍青铜及钛合金等。钛合金的性能较好,但机械加工较困难; 铝合金加工容易,但抗超声空化腐蚀很差,钢损耗较大。

§7.2 设计方法

超声变幅杆的设计归纳起来主要有两种方法: 一种方法是按照特定的变幅杆性能来设计变幅杆的外形函数以满足波动方程。另一种方法是选择一些随坐标有规律变化的外形函数来满足波动方程的解,然后求出各种性能参量。前面所讨论的结果都是用后一种方法得到的。

根据实际应用的要求,设计计算变幅杆的一般步骤如下:

1. 确定工作频率及变幅杆输出端的最大位移振幅 ξ_2 。
2. 选择材料。
3. 根据所选择的材料的声速及疲劳强度来估计所需要的形状因数 φ 。
4. 根据换能器辐射面所能得到的位移振幅 ξ_1 来估算总放大系数 M_T ($M_T = \xi_2/\xi_1$)。换能器辐射面的振动速度主要决

定于输入换能器的电功率和效率以及散热情况,一般来说不易超过 125cm/s (相当于在 20kHz 时位移振幅为 $10\text{ }\mu\text{m}$)。

5. 根据所需要的放大系数 M 及所要求的形状因数 φ 值来选择变幅杆类型及确定变幅杆输入端(一般为大端)和输出端(一般为小端)的直径或面积比。但应注意输入端的直径不能选取过大,否则变幅杆的横向振动就不可忽略。一般取 $D/\lambda < 0.25$, D 为变幅杆大端直径, λ 为波长。如果在实际应用中,工艺要求变幅杆的直径与波长比大于 $\frac{1}{4}$, 例如接近于二分之一波长,则应采取一些措施,比如沿纵向开一些细槽以减小横向振动。此外,变幅杆两端的直径比或面积比也不能过大,否则变幅杆过于细长,弯曲劲度不够,会引起不希望出现的其它振动。

6. 如果单变幅杆不能满足总放大系数 M_T 而需要用两节变幅杆时,还应满足下列关系:

$$\left. \begin{aligned} M_1 \cdot M_2 &= M_T, \\ \varphi_1 &\geq \varphi_2 / M_2, \\ \varphi_2 &\geq \varphi. \end{aligned} \right\}$$

下标 1, 2 代表第一和第二节变幅杆, φ 为给定的形状因数。

纵向振动变幅杆的各种性能比较可以参考 § 2.8 和 § 3.2 及有关图表。

§ 7.3 变幅杆的测量

由于前面的理论计算是近似的,加工成的变幅杆必须进行测量,如不符合要求必须加以修改。此外,在实际应用中还常常遇到一些特殊形状的变幅杆,更难于进行准确的计算,在这种情况下往往先作初步设计,然后通过测量进行修改。本

节讨论变幅杆的共振频率、振幅、放大系数等主要参量的测量及振动分布的测量方法。

7.3.1 共振频率的测量

测量原理如图 7.1 所示。激振器推动变幅杆振动，当激振器的频率与变幅杆的自然频率一致时，变幅杆发生共振，在其输出端振幅最大。用一个拾振器来指示这一最大振幅值出现的频率，即为变幅杆的共振频率。

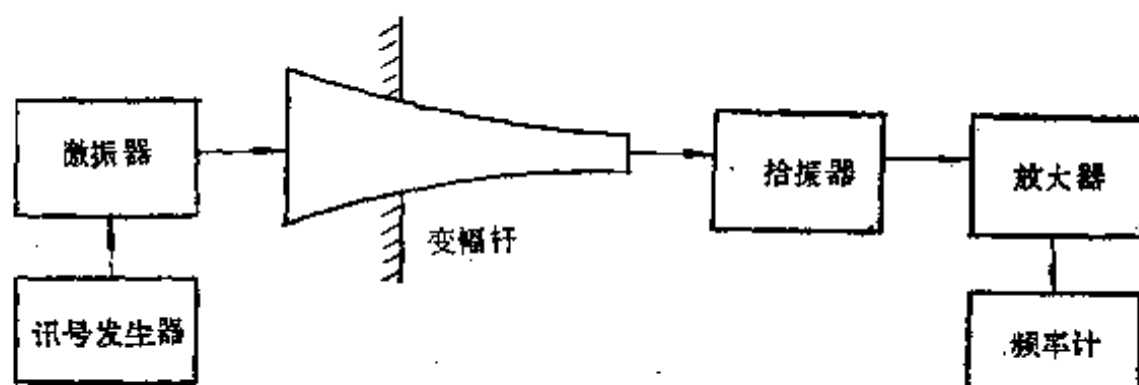


图 7.1 变幅杆共振频率的测量原理方框图

激振器可以是振动台、发射换能器或静电激振器等。当用发射换能器作激振器时，应注意换能器本身的共振频率应远离于变幅杆的共振频率。最好是用宽频带激振器，如静电（或称电容）激振器。静电激振器的工作原理类似于静电（电容）拾振器*，不同的是前者作激发用而后者作接收用。

拾振器可以用压电拾振器，加速度计或静电拾振器。压电拾振器是通过一针状棒将被测振动体的机械振动传到压电元件。由于压电元件的压电效应，将机械振动转换成电压输出。这种拾振器和加速度计是接触式的，非接触式拾振可用

* 林仲茂，董胜林，静电拾振器的计算和实验研究，全国超声加工与处理学术会议，西安（1965）。

静电拾振器。

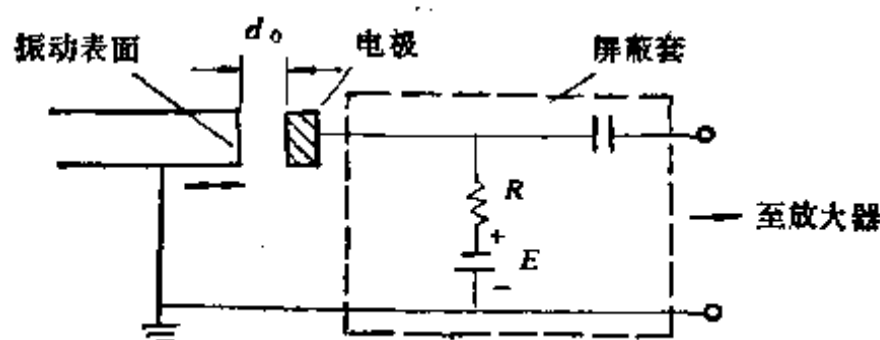


图 7.2 静电拾振器原理图

静电拾振器的工作原理如图 7.2 所示。振动面和电极构成一平行板电容器。静态时，两极板被充电，电荷量决定于电池的电压 E 和静止时的电容量。当物体的表面振动时，电容量改变，这时有充电及放电电流流经电阻 R 而产生交流压降。如果振动体表面的位移振幅比静态时极板间的距离 d_0 小得多，则输出电压正比于位移振幅，拾振器两端的输出电压为

$$U = \frac{-E\xi_0/d_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega C_0 R}\right)^2}} \sin(\omega t + \varphi_1),$$

$$\tan \varphi_1 = \frac{1}{\omega C_0 R}.$$

可见输出电压与位移振幅 ξ_0 及电池电压 E 成正比，而与电极板和振动表面之间的静态距离 d_0 成反比。

当用非接触式激振时，变幅杆应水平放置，而在波节截面处支撑。当用接触式激振时，如用发射换能器或振动台激振，则变幅杆可以垂直地置于振动台或换能器的表面，测量方便简单。一般来说，接触式激振会影响测量精度，不过在工程上一般能够满足要求。若用静电或电动式激振器，还可以做到无接触激振。

作为测量变幅杆共振频率的振幅大小指示器也可以用电容传声器或激光干涉方法给出光电指示。

7.3.2 振幅和振动分布的测量

振幅测量最直接的方法是用光学方法。如用长焦距显微镜在振动端面直接观测,对振幅大于 $10\mu\text{m}$ 的测量较为方便。小振幅精确测量可用激光干涉的方法来测量,利用反馈调制激光测振仪测量小振动的位移振幅很方便,可以在功率超声设备中测量振幅,而不需要用激光全息或干涉仪专门的实验室。

振幅测量的间接方法可使用上述各种拾振器,拾振器经校准后可以作定量测量,其测量速度较快,但精度较差,用于相对测量是很方便的。

沿变幅杆轴向振动分布的测量可以用显微镜逐点测量,但速度很慢,而且精度差,尤其是在振动节点附近,误差更大。用激光全息方法可以记录下振动的分布,但是需要在专门的实验室条件下进行。

在一般条件下,有时用一种比较古老,但是有效的方法在较大振幅下测定变幅杆的位移节点。这种方法是用细而质轻的粉末撒在变幅杆的表面(杆水平放置),然后在共振频率上激起短时间的振动,则粉末会在波节附近集结。这种方法精度虽差,但直观、快捷。

在某些特殊情况下,例如变幅杆是用铁磁材料(如钢材)做成的,则变幅杆的应变(应力)分布可利用磁致伸缩逆效应来测量。测量原理如图 7.3 所示。在变幅杆上套一非接触式的可以沿杆的作轴向移动的线圈,当铁磁棒振动时,由于磁致伸缩反效应,在杆中产生交变磁场,交变磁场的大小正比于应变值。由于通过棒表面漏磁通的存在,线圈中感应的电压

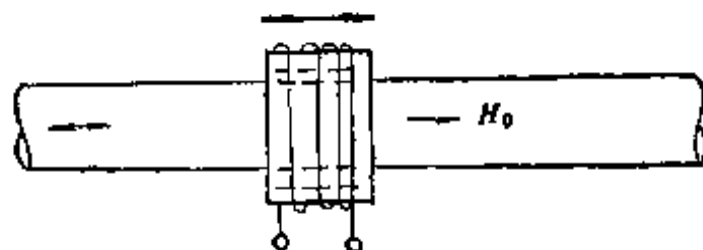


图 7.3 利用磁致伸缩逆效应测量杆振动特性的原理图

也正比于应变值,因而当线圈沿杆作轴向移动时,感应电压值随应变分布不同而改变.为提高测量灵敏度和减少非线性,在线圈中常套一永磁铁环,这种方法用于测定变幅杆的应变极大点和共振频率比较方便^[12],它还可以用于超声冷拔铁磁丝材时的检控设备.

附录 若干种固体的声学常数表

附表 I 某些钢及合金的声学特性^[45]

钢或合金	热处理规范	密度 ρ $10^3(\text{kg/m}^3)$	杨氏模量 E $10^{10}(\text{N/m}^2)$	棒中纵波声速 C_L (m/s)	特性阻抗 ρC_L $10^7(\text{Pa} \cdot \text{s/m})$	应力幅值 σ_m $10^6(\text{kg/m}^2)$	损耗系数 e 10^4
钢 10 钢 20 钢 40	供应状态	7.83	21.04	5177	4.06	4	3.5
	供应状态	7.82	21.00	5174	4.06	4	5.0
	供应状态	7.80	20.84	5168	4.03	6	5.0
钢 45	加热到 820—850°C 在水中淬火， 在 150°C 下回火 2 小时	7.80	20.17	5118	3.97	12	3.3
	加热到 820—850°C 在水中淬火， 在 520—530°C 回火 1 小时	7.80	20.72	5152	4.02	12	3.2
	供应状态	7.81	20.92	5169	4.05	11	4.0
	加热到 840—850°C 在水中淬火， 在 150°C 下回火 2 小时	7.81	20.36	5100	3.99	12	2.1
	加热到 840—850°C 在水中淬火， 在 520—530°C 回火 1 小时	7.81	20.80	5157	4.03	12	2.0
钢 50	供应状态	7.86	20.86	5151	4.05	5	5.0
	加热到 840—850°C 在水中淬火， 在 150°C 下回火 2 小时	7.86	20.36	5099	4.00	12	1.6
钢 20X	加热到 820—840°C 在水中淬火， 在 520—530°C 下回火 1 小时	7.86	20.65	5113	4.02	12	1.6
	供应状态	7.90	20.98	5155	4.08	3	4.0

附表 1 (续)

钢或合金	热处理规范	密度 ρ $10^3(\text{kg}/\text{m}^3)$	杨氏模量 E $10^{10}(\text{N}/\text{m}^2)$	棒中纵波声速 C_L (m/s)	特性阻抗 ρC_L $10^7(\text{Pa} \cdot \text{s}/\text{m})$	应力幅值 σ_m $10^6(\text{kg}/\text{m}^2)$	损耗系数 δ 10^4
钢 12XH3A	供应状态 加热到 880—890℃ 在水中淬火, 在 150℃ 下回火 2 小时	7.88	20.81	5136	4.05	7	4.5
钢 25XHBA	供应状态 加热到 840—850℃ 在空气中淬 火, 在 150℃ 下回火 2 小时	7.82	20.87	5168	4.04	3	5.0
钢 30XI'CA	供应状态 加热到 860—880℃ 在油中淬火, 在 120℃ 下回火 2 小时	7.70	20.86	5206	4.01	7	3.0
钢 1X18H9T	供应状态	7.96	20.24	5039	4.02	5	4.4
钛 BT-1	供应状态	4.52	11.62	5072	2.29	6	1.4
钛合金 OT-4	供应状态	4.45	11.76	5141	2.29	6	1.8
钛合金 BT-3-1	供应状态	4.50	12.07	5178	2.33	6	1.5
钛合金 BT-4	供应状态	4.42	11.64	5130	2.27	6	2.0
铝镁合金 A/Mr	供应状态	2.66	7.20	5200	1.92	2	3.0

* 附表 1 中的数据是在室温及振动频率为 20kHz 条件下测得的。

附表2 室温下炭素钢及合金钢的机械强度 (10^6 kg/m^2)*, (43)

钢 号	强度极限 σ_B	流动极限 σ_s	弯曲(对称循环) 时的疲劳极限 σ_{-1}	剪切(对称循环) 时的疲劳极限 τ_{-1}
10	32—42	18	16—22	8—12
20	40—50	24	17—22	10—13
30	48—60	28	20—27	11—14
35	52—65	30	22—30	13—18
40	57—70	32	23—32	14—19
45	60—75	34	25—34	15—20
50	63—80	35	27—35	16—21
60	65—90	37	31—38	18—22
30Г	56—70	29	28—32	—
50Г	65—85	37	29—36	—
45Г2	70—90	41	31—40	18—22
20X	72—85	40—60	31—38	17—23
40X	73—105	65—90	32—48	21—26
45X	85—105	70—95	40—50	20—30
40XH	100—145	80—130	46—60	23—36
40XHMA	100—170	85—160	50—70	27—38
40XΦ	90—125	80—95	38—49	19—30
50XΦ	115—140	90—120	55—63	28—36
12XH3A	95—140	70—110	42—64	22—30
20XH3A	95—145	85—110	43—65	24—31

* 附表2中的钢是经过调质或正火处理的,试验循环次数为 10^7 。

附表 3 某些合金的声学特性^[18]

材 料	密 度 $10^3(\text{kg/m}^3)$	声速 C (m/s)	疲劳应力 σ_{-1} $10^6(\text{kg/m}^2)$	机械品质因素 Q (约在 $\frac{\sigma_{-1}}{2}$ 测)	棒中的最大 质点速度 $V = \frac{\sigma_{-1}}{\rho C}$ (m/s)	最大可能的 质点速度 (m/s)
海军铜 (BS251)	8.45	3230	15	3000	5.50	17.26
铝青铜 (Hidurax)	8.50	4070	18.5	17000	5.35	16.80
K蒙乃尔	8.90	4300	17.8	5300	4.65	14.60
杜拉铝 (DTD363)	2.79	5130	19.0	>50000	13.20	41.50
铝铜镍合金 (RR77)	2.90	5120	19.4	>100000	13.06	41.05
工具钢 (KE672)	7.90	5240	53	1400	13.20	41.50
钛合金 (ICI318A)	4.51	4900	72	24000	32.58	102.40

附表 4 金属的声速和弹性常数^[44]

材料名称	密度 ρ $10^3(\text{kg/m}^3)$	杨氏模量 E $10^{10}(\text{N/m}^2)$	剪切模量 μ $10^{10}(\text{N/m}^2)$	拉梅常数 λ $10^{10}(\text{N/m}^2)$	泊松比 σ	棒中纵波速度 C_L (m/s)	板中纵波速度 C_p (m/s)	无限介质纵波速度 C_L (m/s)	横波速度 C_T (m/s)	特性阻抗 ρC_L $10^7(\text{Pa} \cdot \text{s/m})$	频率 f (kHz)
铝	2.7	6.85	2.56		0.34	5040	5360	6260	3080	1.69	1000
锌	7.1	10.3	4.12		0.25	3810	3930	4170	2410	2.96	1000
锡	6.7	7.75				3400					1000
铁	22.4	51.4				4790					1000
铜	8.6	4.95	1.94		0.30	2400	2520	2780	1500	2.40	1000
银	10.5	7.32	2.36		0.38	2640	2850	3600	1500	3.80	1000
金	19.3	7.95	2.78		0.42	2030	2240	3240	1200	6.26	1000
钨	7.3	5.44	2.04		0.33	2730	2890	3320	1670	2.42	1000
钼	9.8	3.14	1.19		0.33	1790	1900	2180	1100	2.14	1000
铌	19.1	35.4	13.1		0.35	4360	4600	5460	2620	10.42	1000
钽	16.6	18.6				3350					1000
钨	7.7	20.6	8.03		0.28	5180	5390	5850	3230	4.50	1000
铁	8.9	12.3	4.55		0.35	3710	3960	4700	2260	4.18	1000

附表 4 (续)

材料名称	密度 ρ $10^3(\text{kg/m}^3)$	杨氏模量 E $10^{10}(\text{N/m}^2)$	剪切模量 μ $10^{10}(\text{N/m}^2)$	拉梅常数 λ $10^{10}(\text{N/m}^2)$	泊松比 σ	棒中纵波 速度 C_l (m/s)	板中纵波 速度 C_p (m/s)	无限介质 纵波速度 C_l (m/s)	横波速度 C_t (m/s)	特性阻抗 ρC_l $10^7(\text{Pa} \cdot \text{s/m})$	频率 f (kHz)
铅	11.4	1.64	0.59		0.44	1200	1340	2170	700	2.46	1000
铂	21.4	16.8	5.97		0.39	2800	3040	3960	1670	8.46	1000
镍	8.8	20.1	7.71		0.31	4785	5030	5630	2960	4.95	1000
康铜	8.8	16.3	6.13		0.33	4300	4550	5240	2640	4.60	1000
锰铜	8.4	12.3	4.64		0.33	3830	4060	4660	2350	3.90	1000
黄铜	8.6	10.4	3.8	11.3	0.37	3480	3740	4700	2110	4.06	
铍	1.87	30.8	14.7	16	0.05	12870	12850	12890	8880	2.41	
硬铝	2.79	7.15	2.62	5.44	0.34	5150	5380	6320	3130	1.71	
镁	1.74	4.24	1.62	2.56	0.31	4949	5190	5770	3050	1.0	
钢	7.84	21.6	8.29	10.02	0.28	5250	5470	5941	3251	4.65	
钛	4.50	11.6	4.40	7.79	0.32	5090	5360	6070	3125	2.73	
不锈钢	7.91	19.6	7.57	11.3	0.30	5000	5220	5790	3100	4.57	

附表 5 塑料的声学性能⁽¹⁾

材 料 名 称	密度 ρ $10^3(\text{kg}/\text{m}^3)$	纵 波				横 波				棒 中 纵 波						
		速度 C_L (m/s)	衰减常数 α_L (Np/m)	衰减常数 α_L (dB/cm)	频率 f (kHz)	温度 T (°C)	速度 C_T (m/s)	衰减常数 α_T (Np/m)	衰减常数 α_T (dB/cm)	频率 f (kHz)	温度 T (°C)					
高压聚乙烯 聚丙烯	0.92	1940	2.3	0.20	10—40	室温										
	0.922	2560	1.4	0.12	10—40	室温	1210	0.33	0.029	2	20	1810	0.028	0.0024	0.3	20
聚 氯 乙 烯							1240	0.68	0.059	4	20	1860	0.13	0.011	1	20
							1260	1.01	0.088	6	20	1870	0.54	0.047	3	20
							970	0.13	0.011	1	20	1530	0.021	0.0018	0.3	20
	1.446	2240	1.4	0.12	10—40	室温	980	0.53	0.046	3	20	1550	0.085	0.0074	1	20
聚 甲 基 丙 烯 酸 甲 酯 浇 铸 尼 龙 6 尼 龙 1010							990	0.94	0.082	5	20	1570	0.31	0.027	3	20
							1250	0.13	0.011	1	18	2000	0.12	0.010	1.5	18
	1.190	2660	1.4	0.12	10—40	室温										
	1.153	2150	2.0	0.17	10—40	室温	950	0.89	0.008	2	20	1400	0.010	0.0009	0.3	20
聚 四 氟 乙 烯	1.046	2300	1.0	0.09	10—40	室温	960	0.23	0.020	4	20	1420	0.036	0.0031	1	20
							990	0.81	0.070	8	20	1430	0.11	0.0092	3	20
							460	0.14	0.012	0.5	20	740	0.025	0.0022	0.1	20
	2.209	1390	1.6	0.14	10—40	室温	470	0.46	0.040	1.5	20	760	0.075	0.0065	0.3	20
							480	0.78	0.068	2.5	20	760	0.13	0.011	0.5	20

附表 5 (续)

材料名称	密度 ρ $10^3(\text{kg}/\text{m}^3)$	纵 波				横 波				棒 中 纵 波			
		速度 C_L (m/s)	衰减常数 α_L		频率 f (kHz)	温度 T (°C)	速度 C_T (m/s)	衰减常数 α_T		频率 f (kHz)	温度 T (°C)	衰减常数 α_L	
			(Np/m)	(dB/cm)				(Np/m)	(dB/cm)			(Np/m)	(dB/cm)
聚全氟乙丙烯 ABS 塑料	2.170	1210	1.7	0.15	10—40	室温	910	0.046	0.004	1	20	0.0026	0.00023
	1.050	2130			10—40	室温	920	0.16	0.014	3	20	0.0079	0.00069
聚甲基 聚碳酸酯 氯化聚醚	1.414	2100	3.0	0.26	10—40	室温	930	0.28	0.024	5	20	0.026	0.0023
	1.200	2130	2.5	0.22	10—40	室温	940	0.39	0.034	7	20	0.077	0.0067
	1.408	2280	2.0	0.17	10—40	室温	950	0.51	0.044	9	20		
							830	0.64	0.056	1	20	0.051	0.0044
聚砒							870	1.1	0.095	2	20	0.14	0.012
							880	1.7	0.15	3	20	0.36	0.031
	1.238	2150	1.0	0.09	10—40	室温	910	0.1	0.009	3.2	20		
	1.261						910			6.4	20	0.01	0.001
							910						

附表 5 (续)

材 料 名 称	密度 ρ $10^3(\text{kg}/\text{m}^3)$	纵 波				横 波				棒 中 纵 波			
		速度 C_l (m/s)	衰 减 常 数 α_i		频率 f (kHz)	温度 T (°C)	速度 C_t (m/s)	衰 减 常 数 α_t		速度 C_l (m/s)	衰 减 常 数 α_t	频率 f (kHz)	温度 T (°C)
			(Np/m)	(dB/cm)				(Np/m)	(dB/cm)		(Np/m)	(dB/cm)	
聚芳醚	1.395						900	0.1	0.009	3.2	0.001	1.05	20
							900			6.3			20
聚氧乙烯-丙稀	1.321						980	0.05	0.004	0.5			20
							1010	0.09	0.008	1.0			20
							1050	0.14	0.012	1.5			20
							1080	0.18	0.016	2.0			20
聚甲基丙烯酸甲酯	1.192	2677			1460	0							
	1.1905	2661				10							
	1.1875	2644				20							
	1.184	2602				30							
	1.180	2567				40							
	1.176	2520				50							
	1.172	2483				60							
	1.167	2443				70							
	1.1615	2406				80							

附表 5 (续)

材 料 名 称	密度 ρ $10^3(\text{kg}/\text{m}^3)$	纵 波				横 波				中 纵 波			
		速度 C_L (m/s)	衰减常数 α_L (Np/m)	频率 f (kHz)	温度 T (°C)	速度 C_T (m/s)	衰减常数 α_T (Np/m)	频率 f (kHz)	温度 T (°C)	速度 C_L (m/s)	衰减常数 α_L (Np/m)	频率 f (kHz)	温度 T (°C)
聚甲基丙烯酸甲酯	1.1554	2348			90	1210	0.0005			1880	0.0039		
聚甲基丙烯酸正丁酯	1.176	1960	58	2500	25								20
聚甲基丙烯酸异丁酯	1.05	2080	69	2500	25								
聚氧乙烯	1.346	2240		1460	20								
		2190			30								
		1750			60								
聚偏二氯乙烯	1.71	2400	207	2500	25								
聚乙氧基丁醛	1.107	2350		600	室温								
聚苯乙烯	1.05	2264		2000	25								
		2195		2000	50								
	1.052	2400		600	室温	1150		600	室温				
高压聚乙烯	1.048					1050	0.008	0.0007	20	1750	0.0008	0.00007	20
	0.91	1968			25								

附表 5 (续)

材 料 名 称	密度 ρ $10^3(\text{kg}/\text{m}^3)$	纵 波				横 波				拉 伸 波			
		速度 C_L (m/s)	衰减常数 α_L		频率 f (kHz)	温度 T (°C)	速度 C_T (m/s)	衰减常数 α_T		频率 f (kHz)	温度 T (°C)	衰减常数 α_L	
			(Np/m)	(dB/cm)				(Np/m)	(dB/cm)			(Np/m)	(dB/cm)
高压聚乙烯	0.91	1745			2000	50	490	0.0021	0.00018	0.0019	20	0.0058	0.00050
	0.915				2000	25							
低压聚乙烯	0.96	2313			2000	50	950	0.00086	0.000075	0.0029	20	0.0024	0.00021
	0.940	2176			2880	20	590	0.0013	0.00011	0.0026	20	0.0070	0.00061
低压聚乙烯		1860			600	室温	775			600	室温		
聚三氟氯乙烯	2.099	1930			500	0							
聚偏二氯乙烯	1.779	2292			600	室温	1120			600	室温		
聚苯醚	1.08	2710			10000	25	940	0.00041	0.000036	0.0026	20		
尼龙 66	1.147	2560											
尼龙 610	1.11												
	1.10												
尼龙 101	1.15	2582			2000	25							
尼龙 901	1.16	2615			2000	25							
聚碳酸酯	1.19	2410			450—8000								

附表5 (续)

材料名称	密度 ρ $10^3(\text{kg}/\text{m}^3)$	纵 波				横 波				拉 伸 波		
		速度 C_L (m/s)	衰减常数 α_L (Np/m)	频率 f (kHz)	温度 T (°C)	速度 C_T (m/s)	衰减常数 α_T (Np/m)	频率 f (kHz)	温度 T (°C)	速度 C_L (m/s)	衰减常数 α_L (Np/m)	频率 f (kHz)
聚酰胺	1.57	2594		2000	25							
聚甲醛	1.42	2515		500	0							
聚碳酸酯	1.398			600	室温	960	0.00001	0.000009	0.0034	1300	0.0008	0.0255
	1.425	2440				1000			室温			
	1.20	2173		2000	25	890	0.0001	0.00001	0.0035	1340	0.0005	0.0224
聚芳砜	1.36	2148		2000	25							
聚乙烯醇缩甲醛	1.24	2680	115	2500	25							
聚氧化乙烯	1.208	2250	40	600	室温							
聚苯基对氮杂素	1.209	2460	47	1800	25	1130	178	15.5	1800	1860		1800
酚醛树脂	1.217~ 1.229	2840	29	1800	25	1320	219	19.0	1800	2180		1800
环氧树脂	1.091	2031		402.5	25	1090	0.93	0.081	10	1590	0.21	3
聚酯树脂	1.205			5000					20			
三聚氰胺树脂	1.10	2520								3330		5000

附表 6 塑料的动态力学性能^{〔4〕}

材料名称	密度 ρ $10^3(\text{kg}/\text{m}^3)$	复 杨 氏 模 量				复 剪 切 模 量			
		储能模量 E $10^9(\text{N}/\text{m}^2)$	损耗因子 η_E	频率 f (kHz)	温度 T ($^{\circ}\text{C}$)	储能模量 μ $10^9(\text{N}/\text{m}^2)$	损耗因子 η_{μ}	频率 f (kHz)	温度 T ($^{\circ}\text{C}$)
聚丙烯	0.922	3.02	0.054	0.3	20	1.35	0.064	2	20
		3.19	0.073	1	20	1.42	0.067	4	20
		3.22	0.107	3	20	1.46	0.068	6	20
聚氯乙烯	1.446	3.38	0.033	0.3	20	1.36	0.039	1	20
		3.47	0.042	1	20	1.39	0.055	3	20
		3.56	0.051	3	20	1.42	0.059	5	20
尼龙 1010	1.046	2.05	0.016	0.3	20	0.94	0.014	2	20
		2.11	0.016	1	20	0.96	0.018	4	20
		2.14	0.016	3	20	1.03	0.032	8	20
聚四氟乙烯	2.209	1.21	0.060	0.1	20	0.47	0.040	0.5	20
		1.28	0.060	0.3	20	0.49	0.046	1.5	20
		1.28	0.060	0.5	20	0.51	0.048	2.5	20
ABS 塑料	1.050	2.12	0.012	0.1	20	0.87	0.013	1	20
		2.15	0.012	0.3	20	0.89	0.016	3	20
		2.21	0.012	1	20	0.91	0.016	5	20
氯化聚醚	1.408	2.24	0.012	3	20	0.92	0.017	7	20
		2.13	0.2	0.1	20	0.95	0.017	9	20
		2.45	0.2	0.3	20	1.07	0.15	2	20
		2.76	0.2	0.8	20	1.09	0.16	3	20

附表 6 (续)

材料名称	密度 ρ $10^3(\text{kg}/\text{m}^3)$	复 杨 氏 模 量				复 剪 切 模 量			
		储能模量 E $10^9(\text{N}/\text{m}^2)$	损耗因子 η_p	频率 f (kHz)	温度 T (°C)	储能模量 G $10^9(\text{N}/\text{m}^2)$	损耗因子 η_s	频率 f (kHz)	温度 T (°C)
聚砒	1.261	2.69	0.006	1.05	20	1.04	0.006	3.2	20
聚芳砒	1.395	2.61	0.007	1.05	20	1.02	0.007	6.4	20
聚氯乙烯-丙烯	1.321					1.02		3.2	20
						1.27	0.029	6.3	20
						1.35	0.030	0.5	20
						1.46	0.031	1.0	20
						1.54	0.032	1.5	20
聚苯乙烯	1.048	3.20	0.01	0.042	20	0.92	0.008	2.0	20
聚三氟氯乙烯	2.099	1.94	0.096	0.0229	20	0.72	0.090	0.329	20
高压聚乙烯	0.915	0.57	0.120	0.012	20	0.22	0.170	0.0026	20
低压聚乙烯	0.94	2.11	0.051	0.0227	20	0.84	0.090	0.0019	20
尼龙 610	1.100					0.98	0.048	0.0029	20
聚甲基丙烯酸甲酯	1.176	4.16	0.078	0.030	20	1.71	0.070	0.0026	20
聚甲醛	1.398	3.40	0.013	0.0255	20	1.30	0.009	0.0025	20
聚碳酸酯	1.180	2.12	0.009	0.0224	20	0.94	0.010	0.0034	20
环氧树脂 (6101)	1.205	3.05	0.034		20	1.43	0.032	0.0035	20
酚醛树脂	1.217—1.229	5.79		1800	25	2.13	0.051	10	25
聚苯基对氯杂苯	1.209	4.20		1800	25	1.54	0.036	1800	25

附表7 热塑性塑料的物理机械性能^[44]

序号	名 称	吸水率 %	线胀系数 $10^{-3}/(^{\circ}\text{C})$	热变形温度 $^{\circ}\text{C}$ ($18.6\text{kgf}/\text{cm}^2$) ¹⁾	抗拉强度 (kgf/cm^2)
1	聚乙烯, 低压及高压法	<0.01	12.6—18	30—55	70—240
2	聚乙烯, 超高分子量	<0.01	7.2	40—50	300—340
3	聚丙烯	0.03—0.04	10.8—11.2	55—65	350—400
4	聚氯乙烯, 硬质	0.07—0.4	5—6	55—75	450—500
5	聚氯乙烯, 软质	0.5—1.0	7—25		100—180
6	聚苯乙烯	0.03—0.3	3.6—8.0	90—105	500—600
7	ABS	0.20—0.25	5.8—8.5	90—105	340
8	聚甲基丙烯酸甲酯	0.20—0.4	5—9	85—100	500—770
9	聚酰胺—6, —66 —610, —1010	0.4—1.9	8—12	60—105	450—850
10	聚酰胺, 芳香	0.4	2.8	125	700
11	聚酰胺, 铸型	0.6—1.2	8—9	150	770—920
12	聚甲醛	0.22—0.25	10.7—10.9	110—125	500—600
13	聚碳酸酯	0.2—0.3	6—7	130—140	660—680
14	聚氨酯	0.01	8—11.9	100	420
15	聚酚氧	0.13	3.7—6.1	80—85	560—570
16	聚对苯二甲酸乙二醇酯	0.08—0.09	6.0—9.5	50—85	570
17	氟塑料, F-4	0.01—0.02	10—12	55	140—250
18	氟塑料, F-3	0.02	4.5—7.0	75	310—420
19	氟塑料, F-46	0.01	8.5—10.5	50	190—220
20	聚苯醚	0.07	5—7.5	100—130	650—670
21	聚酰亚胺	0.2—0.3	4—6.3	—	800—1000
22	聚砒	0.1—0.43	5—5.5	175—205	650—900
23	聚苯硫醚	0.01—0.02	3—5.5	100—105	500—700

 $1\text{kgf}/\text{cm}^2 = 9.80665 \times 10^4 \text{Pa}$

附表7 (续)

序号	弹性模量 $10^4(\text{kgf}/\text{cm}^2)$	伸长率 %	抗弯强度 (kgf/cm^2)	冲击强度 (无缺口) $(\text{kgf} \cdot \text{cm}/\text{cm}^2)$	硬度 (HB)	成型收缩率 %
1	0.12—0.95	60—650	250—290	不断	40—70 (HA)	1.5—3.6
2	0.68—0.95	400—480	350—370	190—200 未断	5.8—6.0	
3	1.1—1.6	200	420—560	不断	60—70 (HD)	1.0—2.5
4	3.3	20—40	800—900	30—40	14—17	0.1—0.5
5		180—320			50—75 (HA)	1—5
6	2.8—4.2	1.0—3.7	690—800	12—26	65—80 (HRM)	0.2—0.7
7	2.3—2.9	60	640—680	130—180	8—10	0.3—0.6
8	2.4—3.5	2—7	840—1200	10—12	10—18	0.2—0.6
9	1.2—3.1	60—150	790—1300	250—560	8—10	0.6—1.5
10	2.8	70—150	910	—	93 (HRM)	—
11	2.4—3.6	20—30	1200—1500	500—600	14—21	径向 3—4 纵向 7—10
12	2.5	30—50	900—1000	90—100	10—11	2—3
13	2.5—3.0	80—95	1000—1300	530—580	9—10	0.5—0.8
14	1.1	60—130	720—780	40 以上	—	0.4—0.6
15	2.4—2.7	50—100	840—1000	430	10	0.3—0.4
16	2.8	50—300	840—1170	—	68—98 (HRM)	—
17	0.4	250—500	180—200	—	4.5	模压 1—5
18	1.1—2.1	50—190	520—650		9—13	1—2.5
19	0.35	250—330	—	—	60—65 (HD)	2—5
20	2.5—2.8	50—55	1100—1300	150—180	12—13	0.6—1.0
21		6—10	1000—2100	55—120	20	0.2—0.5
22	2.6—3.2	8—80	1100—1500	350—480	10—13	0.6—0.8
23	1.9	2—4	670	—	124 (HRM)	1.0

参 考 文 献

- [1] H. J. Pain, The Physics of Vibrations and Waves, 2nd Edition, John Wiley & Sons, New York (1976).
- [2] W. T. Thomson, Theory of Vibration with Applications, 2nd Edition, Prentice-Hall (1981).
- [3] H. Kolsky, Stress Waves in Solids, Dover Publications, New York (1963); Oxford (1953).
- [4] M. Redwood, Mechanical Waveguides, Pergamon Press, Oxford (1960).
- [5] W. P. Mason, Physical Acoustics and the Properties of Solids, D. Van Nostrand Company, New York (1958).
- [6] Karl F. Graff, Wave Motion in Elastic Solids, Clarendon Press, Oxford (1975).
- [7] Lawrence E. Kinsler, Austin R. Frey, et al., Fundamentals of Acoustics, third edition, John Wiley & Sons, New York (1982).
- [8] Lord Rayleigh, Theory of Sound, Macmillan (1877).
- [9] L. Filipczyński, Z. Pawtowski, J. Wehr, Ultradźwiękowe Metody Badan Materiałów, Państwowe Wydawnictwa Techniczne (1959).
- [10] Z. Żyszkowski, Podstawy Elektroakustyki, PWT Warszawa (1953).
- [11] Lin Dzon-mou (林仲茂), Equivalent Circuit of a Vibrating System Magnetostrictive Transducer-concentrator-Sample, *Proceedings of Vibration Problems* (Poland) 4, p. 175—184, (1963).
- [12] L. Filipczyński and Lin Dzon-mou (林仲茂), Measurements of Internal Losses in Materials at High-amplitude Vibrations and Ultrasonic Frequencies, *Proceedings of Vibration Problems*, 4(1963).
- [13] E. A. Neppiras, Very High Energy Ultrasonics, *Brit. J. Appl. Phys.*, 11, 143(1960).
- [14] E. Eisner and J. S. Seager, A Longitudinally Resonant Stub for Vibration of Large Amplitude, *Ultrasonics* 3, p. 88—98(1965).
- [15] Hou Liqi (侯立琪), Lin Zhongmao (林仲茂), Ma Yulong (马玉龙), and Ying Chongfu (应崇福), Analysis of Loaded Ultrasonic Amplitude Transformer by Means of Möbius Transformation, *Chinese Journal of Acoustics* Vol. 1, No. 1, p. 64—74(1982).
- [16] E. Eisner, Design of Sonic Amplitude Transformers of High Magnification, *J. Acoust. Soc. Am.*, 35, 1367(1963).
- [17] C. Kleesattel, Forest Hills, 'Vibrator Ampullaceus' Eine Längsschwingenform Zur Erzeugung Grösster Schallschnellen und Wandlerleistungen, *Acustica* 12, 322(1962).

- [18] E. A. Neppiras, Mechanical Transformer for Producing Very Large Motion, *Acustica* 13, 368—370(1963).
- [19] Hou Li-Qu (侯立琪), Lin Zhong-Mao (林仲茂), Ma Yu-Long (马玉龙), Ying Chong-Fu (应崇福), Analysis of Loaded Ultrasonic Horn by Means of Möbius Transformation, *Ultrasonics International 81 Conference Proceedings* 83—87.
- [20] Л. Г. Меркулов, Теория ультразвуковых концентраторов, *Акустический журнал* 3, 230—238(1957).
- [21] Л. Г. Меркулов, Л. В. Харитонов, Теория и расчёт составных концентраторов, *Акуст. Ж.* 5, 183—190(1959).
- [22] В. В. Клубович, А. В. Степаненко, Ультразвуковая обработка материалов, Минск, Наука и Техника (1981).
- [23] Г. Ф. Поволоцкая, Теоретическое исследование инструментов с преобразованием направления колебаний, *Акуст. Ж.* 20, 87—94 (1974).
- [24] В. С. Запорожченко, В. П. Северденко, А. В. Степаненко, Хан Дык Ким, Теоретическое и экспериментальное исследование системы создания интенсивных радиальных колебаний на ультразвуковых частотах, *Акуст. Ж.* 24, 348—353 (1978).
- [25] Г. Ф. Львовская, О способе повышения коэффициента усиления дискостержневого ультразвукового инструмента с преобразованием направления колебаний, *Акуст. Ж.* 22, 613—615 (1976).
- [26] П. Е. Васильев, В. Ф. Каванцев, Дисковые концентраторы радиальных колебаний, *Акуст. Ж.* 22, 825(1976).
- [27] А. В. Харитонов, Крутильные ультразвуковые концентраторы, *Акуст. Ж.* 7, 387(1961).
- [28] Л. О. Макаров, Теоретическое исследование некоторых крутильных колебательных систем, *Акуст. Ж.* 7, 450(1961).
- [29] 何祚镛、赵玉芳编, 声学理论基础, 国防工业出版社(1981).
- [30] 杜功焕、朱哲民、龚秀芬编著, 声学基础(上、下册), 上海科学技术出版社(1981).
- [31] 周静华、林仲茂, 若干组合超声聚能器的计算和测量, *声学学报*, 2, 122—131(1965).
- [32] 侯立琪、林仲茂、马玉龙、应崇福, 有载变幅杆特性的 Möbius 变换分析, *声学学报*, 7, 209—221(1982).
- [33] 汪承浩, 广义变幅器理论——有负载情况下变幅器特性研究, *声学学报*, 5, 12—26 (1980).
- [34] 阮世勋, 超声变幅杆设计用表的计算机编制(I)、(II), *应用声学*, 1, 23 (1982), 2, 29(1983).
- [35] 林仲茂, 超声加工振动系统设计的若干问题, *电加工*, 6, 1—3(1983).
- [36] 章克文、董胜林、丁大成, 等截面超声弯曲谐振杆长度计算, *声学学报*, 1,

54—57 (1981).

- [37] 汪承浩, 盘形聚能器设计理论, 声学学报, 4, 279 (1979).
- [38] 同济大学声学研究室编, 超声工业测量技术, 上海人民出版社 (1977).
- [39] 島川 正宪著, 超音波工学, 工业調査会 (1975).
- [40] 森 栄司, 伊藤 勝彦, 范 恩宏, 振動方向变换複合振動体についての研究, 日本音响学会研究発表会講演論文集, 285 (1968).
- [41] 森 栄司, 伊藤 勝彦, 大輪昇, 振動方向变换体の動作特性に関する研究, 日本音响学会研究発表会講演論文集, 5, 139 (1970).
- [42] 森 栄司, 伊藤 勝彦, 中島良一, 日本音响学会研究発表会講演論文集, 5, 141 (1970).
- [43] Л. Л. 锡林等著, 姜健等译, 超声波焊接, 国防工业出版社, 174—176 (1963).
- [44] 王荣津等编著, 水声材料手册, 科学出版社 (1983).
- [45] 张大安、诸国桢、周铁英, 阶梯形变幅杆固有频率的实验研究, 声学学报, 2, 4, 180—186 (1965).